MATEMATIKA

TURUNAN TRIGONOMETRI

Tujuan Pembelajaran
Setelah mempelajari materi ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut. 1. Dapat menentukan rumus turunan trigonometri berdasarkan definisi turunan fungsi. 2. Dapat menentukan turunan trigonometri berdasarkan rumus turunan fungsi dasarnya. 3. Memahami turunan fungsi komposisi pada turunan trigonometri. 4. Dapat menyelesaikan persoalan yang melibatkan turunan trigonometri.

A. Rumus Turunan Sinus dan Kosinus

Masih ingatkah kamu dengan fungsi trigonometri? Fungsi trigonometri adalah fungsi yang memuat perbandingan trigonometri, yaitu sinus, kosinus, tangen, sekan, kosekan, atau kotangen. Namun, perlu diingat bahwa perbandingan trigonometri tersebut bukan berupa pangkat (eksponen). Agar kamu semakin memahami ciri-ciri fungsi trigonometri, perhatikan tabel berikut ini.

Tabel Contoh Fungsi Trigonometri

Contoh Fungsi	
Fungsi Trigonometri	Bukan Fungsi Trigonometri
$\cos 2x + \sin x$	$\frac{1}{\sin^2 x} + 12 + 3^{\tan x}$
$23 + 42t + 16\sin\frac{\pi t}{3}$	$\cot x - (\cos 5x)^{\sin x} - x^2$
$\sin t + t^2 + \frac{1}{\cos t}$	$\sqrt[\sin t]{t^2 + 2t + 1}$

Setelah kamu dapat membedakan antara fungsi trigonometri dan bukan fungsi trigonometri, mari pelajari turunan dari fungsi dasarnya. Untuk menentukan turunan dari fungsi dasar trigonometri, misalnya $f(x) = \sin x$, rumus-rumus yang digunakan adalah sebagai berikut.

1. Definisi turunan yang berkaitan dengan limit fungsi

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Rumus selisih sinus

$$\sin A - \sin B = 2\cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

3. Rumus limit trigonometri

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

4. Teorema limit

$$\lim_{x \to c} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$$

Oleh karena $f(x) = \sin x$, maka $f(x + h) = \sin (x + h)$. Dengan menggunakan definisi turunan, diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos \frac{1}{2}(x+h+x) \cdot \sin \frac{1}{2}(x+h-x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \cdot \sin \frac{1}{2}h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 2\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{h} \\
&= (2\cos x)\left(\frac{1}{2}\right) = \cos x
\end{aligned}$$

Jadi, $f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$.

Dengan cara yang sama, turunan dari fungsi $f(x) = \cos x$ dapat ditentukan dengan mengganti penggunaan rumus selisih sinus dengan selisih kosinus berikut.

$$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{1}{2}(A+B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

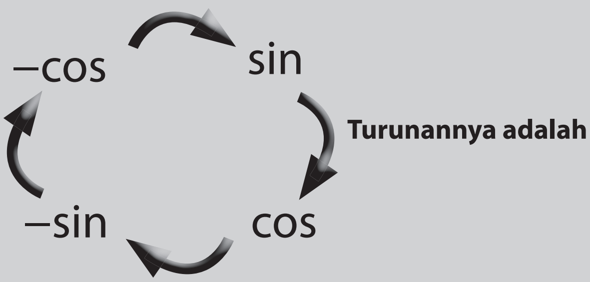
Dengan demikian, rumus turunan sinus dan kosinus adalah sebagai berikut.

Tabel Turunan Fungsi Trigonometri dan Notasi Leibniz

Fungsi Trigonometri	**Turunan**	**Notasi Leibniz**
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\frac{d(f(x))}{dx} = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\frac{d(f(x))}{dx} = -\sin x$

SUPER, Solusi Quipper

Cara mengingat turunan sinus dan kosinus dengan mudah adalah sebagai berikut.



Catatan: arah panah menunjukkan hasil turunannya.

Turunan fungsi $f(x) = \sin x$ dan $f(x) = \cos x$ merupakan dasar untuk menentukan turunan fungsi trigonometri dasar lainnya.

Untuk menentukan turunan fungsi trigonometri, juga digunakan rumus-rumus turunan fungsi aljabar berikut.

Rumus-Rumus Turunan Fungsi Aljabar

1. $f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
3. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$
4. $f(x) = k \cdot u(x) \rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$
5. $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

Contoh Soal 1

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut ini.

a. $f(x) = 4 \sin x$

b. $f(x) = x^3 + 5 \cos x$

c. $f(x) = 8x^2 - 2 \cos x + 3 \sin x - 16$

Pembahasan:

Berdasarkan rumus turunan sinus dan kosinus, diperoleh:

a. $f(x) = 4 \sin x \rightarrow f'(x) = 4 \cos x$

b. $f(x) = x^3 + 5 \cos x \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 5(-\sin x) = 3x^2 - 5 \sin x$

c. $f(x) = 8x^2 - 2 \cos x + 3 \sin x - 16 \rightarrow f'(x) = 16x - 2(-\sin x) + 3 \cos x$

$\Leftrightarrow f'(x) = 16x + 2 \sin x + 3 \cos x$

Contoh Soal 2

Diketahui $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \sqrt{3} \cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Tentukan nilai x yang memenuhi $-f'(x) = g'(x)$.

Pembahasan:

Oleh karena $-f'(x) = g'(x)$, maka:

$$-f'(x) = g'(x)$$
$$\Leftrightarrow -\cos x = -\sqrt{3} \sin x$$
$$\Leftrightarrow \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ (memenuhi)}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi $-f'(x) = g'(x)$ adalah $x = \frac{\pi}{6}$.

Contoh Soal 3

Diketahui $f(x) = 12x - \cos x$ dan $g(x) = f'(x) + f''(x)$, dengan $f'(x)$ dan $f''(x)$ berturut-turut adalah turunan pertama dan kedua dari $f(x)$. Jika $g'(x)$ adalah turunan pertama dari $g(x)$, tentukan nilai x yang memenuhi $g'(x) = 0$ dengan $0 \le x \le 2\pi$.

Pembahasan:

Mula-mula, tentukan $f'(x)$, $f''(x)$, dan $g'(x)$.

$$f(x)=12x-\cos x$$
$$\rightarrow f'(x)=12-(-\sin x)=12+\sin x$$
$$\rightarrow f''(x)=0+\cos x=\cos x$$

$$g(x)=f'(x)+f''(x)=12+\sin x+\cos x$$
$$\rightarrow g'(x)=\cos x-\sin x$$

Selanjutnya, tentukan nilai x yang memenuhi $g'(x)=0$.

$$g'(x)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x-\sin x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x=\sin x$$
$$\Leftrightarrow 1=\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow \tan x=1$$

Dengan menggunakan persamaan trigonometri untuk tangen, diperoleh:

$$\tan x=1$$
$$\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi \text{ dengan } k=0,\ 1,\ 2,\ ...$$
$$k=0\rightarrow x=\frac{\pi}{4}\ \text{(memenuhi)}$$
$$k=1\rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}\ \text{(memenuhi)}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi $g'(x)=0$ adalah $\frac{\pi}{4}$ dan $\frac{5\pi}{4}$.

B. Rumus Turunan Fungsi Dasar Trigonometri Lainnya

Sifat-sifat turunan fungsi aljabar juga berlaku pada turunan trigonometri. Agar kamu mengingatnya kembali, perhatikan sifat-sifat berikut ini.

Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar

1. $f(x)=u(x)\cdot v(x)\rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$
2. $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}\rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$

dengan f, u, v adalah fungsi dalam variabel x.

Turunan dari bentuk $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ dapat digunakan untuk menentukan turunan dari fungsi trigonometri tangen (tan), sekan (sec), kosekan (cosec), dan kotangen (cotan). Sementara itu, rumus-rumus yang sering digunakan dalam mengerjakan persoalan turunan trigonometri adalah sebagai berikut.

1. Identitas perbandingan

$$\tan(nx)=\frac{\sin(nx)}{\cos(nx)} \text{ atau } \text{cotan}(nx)=\frac{\cos(nx)}{\sin(nx)}$$

2. Identitas Pythagoras

$$\sin^2(nx)+\cos^2(nx)=1$$
$$\tan^2(nx)+1=\sec^2(nx)$$
$$\text{cotan}^2(nx)+1=\text{cosec}^2(nx)$$

3. Sinus sudut rangkap

$$\sin(nx)=2\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

4. Kosinus sudut rangkap

$$\begin{aligned}\cos(nx)&=1-2\sin^2\left(\frac{n}{2}x\right)\\&=2\cos^2\left(\frac{n}{2}x\right)-1\\&=\cos^2\left(\frac{n}{2}x\right)-\sin^2\left(\frac{n}{2}x\right)\end{aligned}$$

Contoh Soal 4

Jika $f(x) = \tan x$, tentukan $f'(x)$.

Pembahasan:

Dengan menggunakan identitas perbandingan, diperoleh:

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot$$

Misalkan:

$$u(x) = \sin x \rightarrow u'(x) = \cos x$$
$$v(x) = \cos x \rightarrow v'(x) = -\sin x$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{\cos x(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

Jadi, $f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$.

Dengan cara yang sama, diperoleh $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow f'(x) = -\text{cosec}^2\ x$.

Contoh Soal 5

Jika $f(x) = \sec x$, tentukan $f'(x)$.

Pembahasan:

Dengan menggunakan identitas kebalikan, diperoleh:

$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$.

Misalkan:

$$u(x) = 1 \rightarrow u'(x) = 0$$
$$v(x) = \cos x \rightarrow v'(x) = -\sin x$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{0(\cos x) - 1(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \sec x \cdot \tan x
\end{aligned}$$

Jadi, $f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x \cdot \tan x$.

Dengan cara yang sama, diperoleh $f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$.

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh kesimpulan berikut.

Tabel Turunan dan Notasi Leibniz Fungsi Trigonometri

Fungsi Trigonometri	Turunan	Notasi Leibniz
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = -\sec^2 x$	$\frac{d(f(x))}{dx} = \sec^2 x$
$f(x) = \operatorname{cotan} x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\frac{d(f(x))}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x \cdot \tan x$	$\frac{d(f(x))}{dx} = \sec x \cdot \tan x$
$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotan} x$	$\frac{d(f(x))}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotan} x$

SUPER, Solusi Quipper

Cara mudah mengingat turunan tangen, kotangen, sekan, dan kosekan adalah dengan menggunakan isyarat yang sering dipakai untuk meminta orang lain diam, yaitu "sst".

$$\text{sst}\begin{cases} \underline{\text{s}}\text{ec} \longrightarrow \underline{\text{s}}\text{ec} \longleftarrow \underline{\text{t}}\text{an} \\ \text{co}\underline{\text{s}}\text{ec} \longrightarrow -\text{co}\underline{\text{s}}\text{ec} \longleftarrow \text{co}\underline{\text{t}}\text{an} \end{cases}$$

Catatan:

- Arah panah menunjukkan hasil turunannya.
- Jika diawali dengan huruf c, maka hasil turunannya negatif.

Contoh:

$f(x) = \sec x \longrightarrow f'(x) = \sec x \cdot \tan x$

$f(x) = \text{cotan}\, x \longrightarrow f'(x) = -\text{cosec}\, x \cdot \text{cosec}\, x = -\text{cosec}^2 x$

Contoh Soal 6

Jika $f(x) = \sin x \cdot \tan x$, tentukan $f'(x)$.

Pembahasan:

Fungsi $f(x)$ memuat perkalian fungsi, sehingga sifat yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Misalkan:

$$u(x) = \sin x \rightarrow u'(x) = \cos x$$
$$v(x) = \tan x \rightarrow v'(x) = \sec^2 x$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= \cos x(\tan x) + \sin x(\sec^2 x) \\ &= \cancel{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} + \sin x \cdot \sec^2 x \\ &= \sin x + \sin x \cdot \sec^2 x \\ &= \sin x(1 + \sec^2 x) \end{aligned}$$

Jadi, $f'(x) = \sin x(1 + \sec^2 x)$.

Contoh Soal 7

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)=\frac{\tan x-1}{\sec x}$.

Pembahasan:

Mula-mula, modifikasi dahulu bentuk fungsinya.

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\tan x-1}{\sec x}\\&=\frac{\tan x}{\sec x}-\frac{1}{\sec x}\\&=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x-\cos x\\&=\sin x-\cos x\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$f'(x)=\cos x-(-\sin x)=\cos x+\sin x$

Jadi, $f'(x)=\cos x+\sin x$.

C. Turunan Fungsi Komposisi

Prinsip utama turunan fungsi komposisi pada turunan aljabar juga berlaku pada turunan trigonometri, yaitu sebagai berikut.

- $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))\rightarrow y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
- $y=(f\circ g\circ h)(x)=f(g(h(x)))\rightarrow y'=f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$

Turunan fungsi komposisi juga dapat ditentukan dengan **aturan rantai**, yaitu sebagai berikut.

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$ dengan *y, u, v* adalah fungsi dalam variabel *x*.

Dari turunan fungsi komposisi, diperoleh pengembangan rumus turunan fungsi komposisi trigonometri, yaitu sebagai berikut.

1. $f(x)=\sin(ax+b)\rightarrow f'(x)=a\cos(ax+b)$
2. $f(x)=\cos(ax+b)\rightarrow f'(x)=-a\sin(ax+b)$
3. $f(x)=k\cdot\sin^n(ax+b)\rightarrow f'(x)=k\cdot na\cdot\sin^{n-1}(ax+b)\cdot\cos(ax+b)$
4. $f(x)=k\cdot\cos^n(ax+b)\rightarrow f'(x)=-k\cdot na\cdot\cos^{n-1}(ax+b)\cdot\sin(ax+b)$

dengan $a, b, k, n\in$ bilangan real.

Contoh Soal 8

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x)=\sin(2x+9)$

b. $f(x)=2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

Pembahasan:

a. Untuk menentukan turunan dari fungsi tersebut, gunakan rumus berikut.

$f(x)=\sin(ax+b)\rightarrow f'(x)=a\cos(ax+b)$

Dengan demikian, diperoleh:

$f'(x)=2\cdot\cos(2x+9)$

Jadi, turunan pertama dari $f(x) = \sin(2x + 9)$ adalah $f'(x) = 2\cos(2x + 9)$.

b. Untuk menentukan turunan dari fungsi tersebut, gunakan rumus berikut.

$f(x)=k\cdot\cos^n(ax+b)\rightarrow f'(x)=-k\cdot na\cdot\cos^{n-1}(ax+b)\cdot\sin(ax+b)$

Dengan demikian, diperoleh:

$$f'(x)=-2(2)(-3)\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$$

$$\left(\text{Gunakan rumus } \cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A \text{ dan } \sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos A\right)$$

$$=2(2)(3)\sin 3x\cdot\cos 3x$$

$$\left(\text{Gunakan rumus } \sin nx=2\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right) \text{ dengan } \frac{n}{2}=3\right)$$

$$=6\cdot\sin 6x$$

Jadi, turunan pertama dari $f(x)=2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ adalah $f'(x) = 6\sin 6x$.

Contoh Soal 9

Tentukan turunan pertama dari $f(x)=16\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$.

Pembahasan:

$$f(x)=16\sqrt{\sin\frac{x}{2}}=16\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Untuk menentukan turunan dari fungsi tersebut, gunakan rumus berikut.

$f(x)=k.\sin^n(ax+b)\rightarrow f'(x)=k.na.\sin^{n-1}(ax+b).\cos(ax+b)$

Dengan demikian, diperoleh:

$$f'(x)=16\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sin^{-\frac{1}{2}}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$\left(\text{Gunakan sifat eksponen } a^{n+m}=a^n\cdot a^m\right)$$

$$=2\sin^{-\frac{3}{2}}\frac{x}{2}\cdot(2)\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$\left(\text{Gunakan } \sin(nx)=2\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right)$$

$$=\frac{2\sin x}{\sqrt{\sin^3\frac{x}{2}}}$$

Jadi, turunan pertamanya adalah $f'(x)=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{\sin^3\frac{x}{2}}}$.

Contoh Soal 10

Turunan pertama dari $f(x)=\sin^3(5x+8)$ adalah .... (UN 2016)

A. $f'(x) = 3\sin^2(5x + 8)\cos(5x + 8)$

B. $f'(x) = 15\sin^2(5x + 8)\cos(5x + 8)$

C. $f'(x) = 15\cos^3(5x + 8)\sin(5x + 8)$

D. $f'(x) = 5\cos^3(5x + 8)\cos(5x + 8)$

E. $f'(x) = 3\cos^3(5x + 8)\cos(5x + 8)$

Pembahasan:

Jawaban: B

Untuk menentukan turunan dari fungsi tersebut, gunakan rumus berikut.

$$f(x)=k\cdot\sin^n(ax+b)\rightarrow f'(x)=k\cdot na\cdot\sin^{n-1}(ax+b)\cdot\cos(ax+b)$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$f'(x)=3(5)\sin^2(5x+8)\cdot\cos(5x+8)$$
$$=15\sin^2(5x+8)\cdot\cos(5x+8)$$

Jadi, turunan pertamanya adalah $f'(x)=15\sin^2(5x+8)\cdot\cos(5x+8)$.

Contoh Soal 11

Tentukan turunan pertama dari $y=\tan\left(\frac{4-7x}{2x+1}\right)$.

Pembahasan:

$y=\tan\left(\frac{4-7x}{2x+1}\right)$ dapat dinyatakan sebagai komposisi dari *f*(*x*) = tan *x* dan $g(x)=\frac{4-7x}{2x+1}=\frac{-7x+4}{2x+1}$.

Ini berarti, $y=\tan\left(\frac{4-7x}{2x+1}\right)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi $y = f(g(x))$.

Turunan dari $f(x) = \tan x$ adalah $f'(x) = \sec^2 x$, sehingga $f'(g(x)) = \sec^2(g(x))$.

Turunan dari $g(x)=\frac{-7x+4}{2x+1}$ dapat ditentukan dengan SUPER "Solusi Quipper" (pada turunan aljabar), yaitu sebagai berikut.

$g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\rightarrow g'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ dengan $a = -7$, $b = 4$, $c = 2$, dan $d = 1$.

Dengan demikian, diperoleh:

$$g'(x)=\frac{-7(1)-4(2)}{(2x+1)^2}=\frac{-15}{(2x+1)^2}$$

Dengan menggunakan rumus turunan fungsi komposisi, diperoleh:

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)).g'(x) \\ &= \sec^2(g(x))\frac{-15}{(2x+1)^2} \\ &= -\frac{15}{(2x+1)^2}.\sec^2\left(\frac{4-7x}{2x+1}\right) \end{aligned}$$

Jadi, turunan pertamanya adalah $y'=-\frac{15}{(2x+1)^2}\cdot\sec^2\left(\frac{4-7x}{2x+1}\right)$.

D. Nilai Turunan suatu Fungsi di $x = p$

Jika $y = f(x)$ memiliki turunan di $x = p$, nilai turunan pertamanya adalah $f'(p)$.

Contoh Soal 12

Jika $f(x) = 3\cos\left(10x - \frac{\pi}{6}\right)$, tentukan nilai dari $f'(0)$.

Pembahasan:

Dengan menggunakan rumus $f(x) = \cos(ax+b) \rightarrow f'(x) = -a\sin(ax+b)$, diperoleh:

$$f'(x) = -3(10)\sin\left(10x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(0) = -3(10)\sin\left(10(0) - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(0) = -3(10)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$\left(\text{Gunakan } \sin(-x) = -\sin x\right)$

$$\Leftrightarrow f'(0) = 30\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(0) = 30 \times \frac{1}{2} = 15$$

Jadi, nilai dari $f'(0) = 15$.

Contoh Soal 13

Diketahui $f(x) = g(x)\sin h(x)$, dengan $g(2) = -1$, $g'(2) = -3$, $h(2) = 0$, dan $h'(2) = 2$. Tentukan nilai dari $f'(2)$.

Pembahasan:

Fungsi $f(x)$ memuat perkalian fungsi, sehingga sifat yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$f(x) = u(x)\cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Misalkan:

$$u(x) = g(x) \rightarrow u'(x) = g'(x)$$
$$v(x) = \sin h(x) \rightarrow v'(x) = h'(x)\cdot\cos h(x)$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = g'(x)\cdot\sin h(x) + g(x)\cdot h'(x)\cdot\cos h(x)$$
$$\Leftrightarrow f'(2) = g'(2)\cdot\sin h(2) + g(2)\cdot h'(2)\cdot\cos h(2)$$

$\Leftrightarrow f'(2) = (-3)\cdot \sin 0 + (-1)(2)\cdot \cos 0$

$\Leftrightarrow f'(2) = (-3)(0) + (-1)(2)(1)$

$\Leftrightarrow f'(2) = -2$

Jadi, nilai dari $f'(2) = -2$.

Contoh Soal 14

Diketahui $g(x) = (1+\cos x)^2 (1+\sin x)^4$ dan $g'(x)$ adalah turunan pertama dari $g(x)$. Tentukan nilai dari $g'(2\pi)$.

Pembahasan:

Fungsi $g(x)$ memuat perkalian fungsi, sehingga sifat yang digunakan adalah sebagai berikut.

$g(x) = u(x).v(x) \to g'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

Misalkan $u(x) = (1+\cos x)^2$ dan $v(x) = (1+\sin x)^4$. Dengan demikian, diperoleh:

$u(2\pi) = (1+\cos 2\pi)^2 = (1+1)^2 = 4$

$v(2\pi) = (1+\sin 2\pi)^4 = (1+0)^4 = 1$

Selanjutnya, tentukan nilai $u'(2\pi)$ dan $v'(2\pi)$

$u'(x) = 2(1+\cos x)(-\sin x)$

$\Leftrightarrow u'(2\pi) = 2(1+\cos 2\pi)(-\sin 2\pi) = 2(1+1)0 = 0$

$v'(x) = 4(1+\sin x)^3 \cos x$

$\Leftrightarrow v'(2\pi) = 4(1+\sin 2\pi)^3 \cos 2\pi = 4(1+0)^3 (1) = 4$

Dengan demikian, diperoleh:

$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$\Leftrightarrow g'(2\pi) = u'(2\pi)\cdot v(2\pi) + u(2\pi)\cdot v'(2\pi)$

$\Leftrightarrow g'(2\pi) = 0(1) + 4(4)$

$\Leftrightarrow g'(2\pi) = 16$

Jadi, nilai dari $g'(2\pi) = 16$.

Contoh Soal 15

Jika $g(x) = a \tan x - bx$, $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, dan $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6$, tentukan nilai dari $a + b$.

Pembahasan:

Mula-mula, tentukan $g'(x)$.

$$g'(x) = a \cdot \sec^2 x - b = \frac{a}{\cos^2 x} - b$$

Selanjutnya, tentukan nilai a dan b dengan cara eliminasi-substitusi.

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - b = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} - b = 2$$

$$\Leftrightarrow 2a - b = 2 \text{ ... (i)}$$

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} - b = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - b = 6$$

$$\Leftrightarrow 4a - b = 6 \text{ ... (ii)}$$

Dengan mengeliminasi persamaan (i) dan (ii), diperoleh:

$$\begin{array}{l} 2a - b = 2 \\ \underline{4a - b = 6} \; - \\ -2a = -4 \Leftrightarrow a = 2 \end{array}$$

Dengan mensubstitusikan $a = 2$ ke persamaan (i), diperoleh:

$2(2) - b = 2 \Leftrightarrow b = 2$

Jadi, nilai dari $a + b = 2 + 2 = 4$.