

MATEMATIKA

PERSAMAAN LINGKARAN

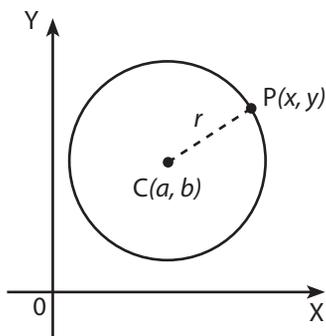
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini, kamu diharapkan mempunyai kemampuan sebagai berikut.

1. Memahami definisi lingkaran.
2. Memahami persamaan umum lingkaran.
3. Memahami hubungan dua buah lingkaran.
4. Menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan persamaan lingkaran.

A. Definisi Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu pada bidang datar. Jarak yang dimaksud adalah **jari-jari lingkaran**, sedangkan titik tertentu yang dimaksud adalah **pusat lingkaran**. Perhatikan gambar berikut!



Gambar di atas memperlihatkan lingkaran yang berpusat di $C(a, b)$ dan jari-jari r .

Misalkan titik $P(x, y)$ adalah sembarang titik yang terletak pada keliling lingkaran. Jarak titik $P(x, y)$ ke titik pusat lingkaran dinyatakan dengan rumus berikut.

$$d(P, C) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

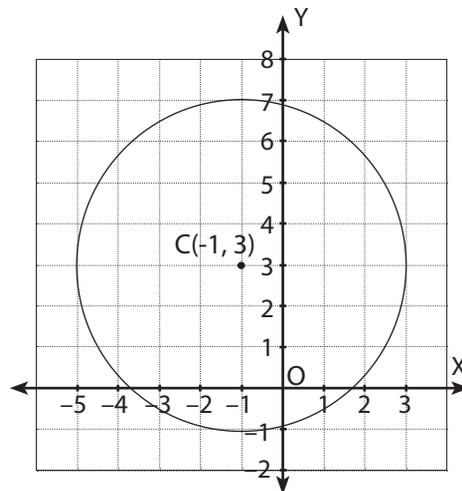
Persamaan di atas merupakan persamaan lingkaran dengan pusat $C(a, b)$ dan jari-jari r .

Contoh Soal 1

Gambarlah lingkaran $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$!

Pembahasan:

Lingkaran $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$ adalah lingkaran yang berpusat di $(a, b) = (-1, 3)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{16} = 4$. Dengan demikian, gambar lingkarannya adalah sebagai berikut.



B. Persamaan Umum Lingkaran

Persamaan lingkaran dengan pusat $C(a, b)$ dan jari-jari r adalah sebagai berikut.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jika persamaan tersebut diuraikan, diperoleh:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + Ax + By + C &= 0\end{aligned}$$

Persamaan di atas disebut sebagai persamaan umum lingkaran, dengan:

$$\begin{aligned}A = -2a &\Rightarrow a = -\frac{1}{2}A \\ B = -2b &\Rightarrow b = -\frac{1}{2}B\end{aligned}$$

Berdasarkan nilai tersebut, pusat lingkarannya dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$C(a, b) = C\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$$

Sementara itu, jari-jari lingkarannya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 - r^2 &= C \\ \Leftrightarrow r &= \sqrt{a^2 + b^2 - C}\end{aligned}$$

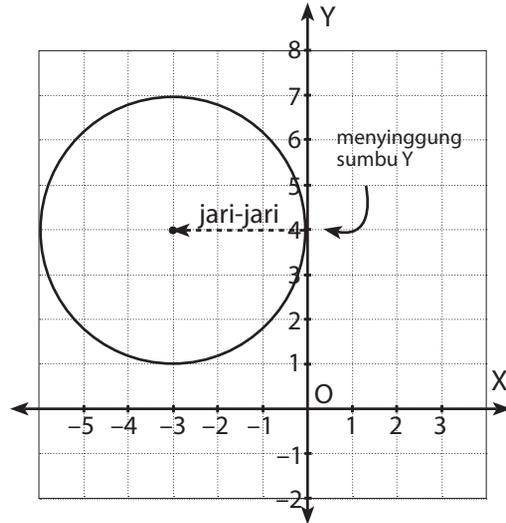
Persamaan Umum Lingkaran	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
Pusat Lingkaran	$(a, b) = \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$
Jari-Jari Lingkaran	$r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$

Contoh Soal 2

Persamaan umum lingkaran yang berpusat di $(-3, 4)$ dan menyinggung sumbu-Y adalah

Pembahasan:

Grafik lingkaran yang berpusat di $(a, b) = (-3, 4)$ dan menyinggung sumbu-Y adalah sebagai berikut.

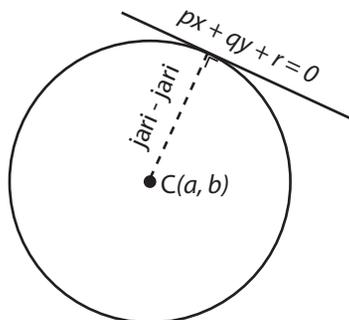


Berdasarkan gambar tersebut, tampak jelas bahwa lingkaran di atas memiliki pusat $(a, b) = (-3, 4)$ dan jari-jari 3. Dengan demikian, diperoleh:

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow (x - (-3))^2 + (y - (4))^2 &= 3^2 \\ \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 &= 3^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 &= 9 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan umum lingkaran yang berpusat di $(-3, 4)$ dan menyinggung sumbu-Y adalah $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$.

Pada beberapa soal, jari-jari lingkaran tidak diketahui, tetapi persamaan garis singgungnya diketahui, yaitu $px + qy + r = 0$. Jari-jari adalah jarak dari titik pusat $C(a, b)$ ke garis singgung lingkaran. Perhatikan gambar berikut!



Dengan menggunakan rumus jarak titik pada garis, diperoleh rumus untuk mencari jari-jari lingkaran berikut.

$$\text{Jari - jari} = \left| \frac{p(a) + q(b) + r}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right|$$

Contoh Soal 3

Persamaan umum lingkaran yang berpusat di titik (5, 1) dan menyinggung garis $3x - 4y + 4 = 0$ adalah

Pembahasan:

Diketahui pusat lingkaran $(a, b) = (5, 1)$ dan garis singgung lingkaran $px + qy + r = 3x - 4y + 4 = 0$. Jari-jari lingkaran dengan pusat (5, 1) dan garis singgung $3x - 4y + 4 = 0$ adalah sebagai berikut.

$$\text{Jari - jari} = r = \left| \frac{3(5) - 4(1) + 4}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right|$$

$$\Leftrightarrow \text{Jari - jari} = r = \left| \frac{15}{5} \right|$$

$$\Leftrightarrow \text{Jari - jari} = r = 3$$

Dengan demikian, persamaan umum lingkarannya adalah sebagai berikut.

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$$

Jadi, persamaan umum lingkaran yang berpusat di titik (5, 1) dan menyinggung garis $3x - 4y + 4 = 0$ adalah $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$.

Contoh Soal 4

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$.

Pembahasan:

Diketahui $A = -10$, $B = 4$, dan $C = 4$.

Dengan demikian, pusat lingkarannya adalah sebagai berikut.

$$P(a,b) = P\left(-\frac{1}{2}(-10), -\frac{1}{2}(4)\right)$$

$$\Leftrightarrow P(a,b) = P(5, -2)$$

Sementara itu, jari-jarinya adalah sebagai berikut.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{5^2 + (-2)^2 - 4}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow r = 5$$

Jadi, pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$ berturut-turut adalah $P(5, -2)$ dan $r = 5$.

Contoh Soal 5

Persamaan umum lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y + p = 0$ mempunyai jari-jari 4. Nilai p adalah

Pembahasan:

Diketahui $A = 6$, $B = -4$, $C = p$, dan $r = 4$.

Pusat lingkaran dirumuskan sebagai berikut.

$$T(a,b) = T\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$$

$$\Leftrightarrow T(a,b) = T\left(-\frac{1}{2}(6), -\frac{1}{2}(-4)\right)$$

$$\Leftrightarrow T(a,b) = T(-3, 2)$$

Dengan demikian, nilai p dapat ditentukan sebagai berikut.

$$r = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 - C} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 - p} = 4$$

$$\Leftrightarrow 13 - p = 16$$

$$\Leftrightarrow p = -3$$

Jadi, nilai $p = -3$.

Contoh Soal 6

Persamaan umum lingkaran yang sepusat dan berjari-jari dua kalinya lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ adalah

Pembahasan:

Dari lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$, diketahui nilai $A = -6$, $B = 2$, dan $C = 1$.

Pusat lingkaran:

$$C_2(a_2, b_2) = C_1(a_1, b_1)$$

$$\Leftrightarrow C_2(a_2, b_2) = \left(-\frac{1}{2}(-6), -\frac{1}{2}(2) \right)$$

$$\Leftrightarrow C_2(a_2, b_2) = (3, -1)$$

Jari-jari lingkaran:

$$r_2 = 2r_1$$

$$\Leftrightarrow r_2 = 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - C}$$

$$\Leftrightarrow r_2 = 2\sqrt{(3)^2 + (-1)^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow r_2 = 6$$

Dengan demikian, persamaan umum lingkarannya adalah sebagai berikut.

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 36$$

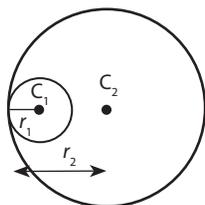
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y - 26 = 0$$

Jadi, persamaan umum lingkaran yang sepusat dan berjari-jari dua kalinya lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ adalah $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 26 = 0$.

C. Hubungan Dua Buah Lingkaran

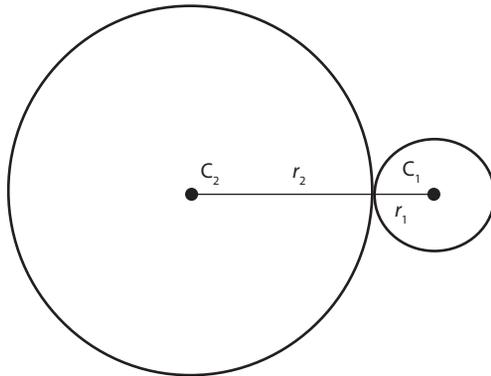
Dua buah lingkaran L_1 dengan pusat C_1 , jari-jari r_1 dan lingkaran L_2 dengan pusat C_2 , jari-jari r_2 memiliki kedudukan sebagai berikut.

1. L_1 bersinggungan dalam dengan L_2



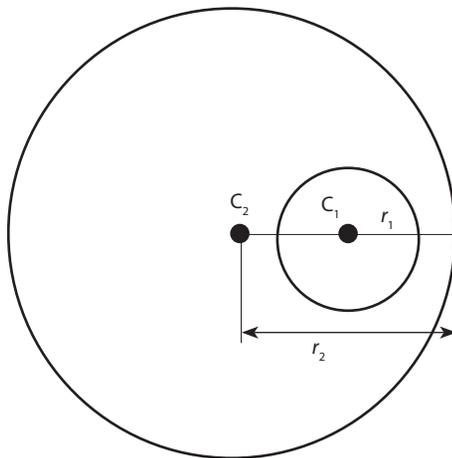
$$\text{Berlaku } |r_2 - r_1| = |C_1C_2|$$

2. L_1 bersinggungan luar dengan L_2



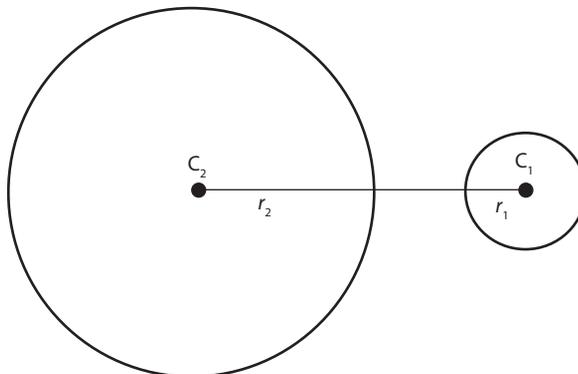
Berlaku $|r_2 + r_1| = |C_1C_2|$

3. L_1 di dalam L_2 tanpa bersinggungan



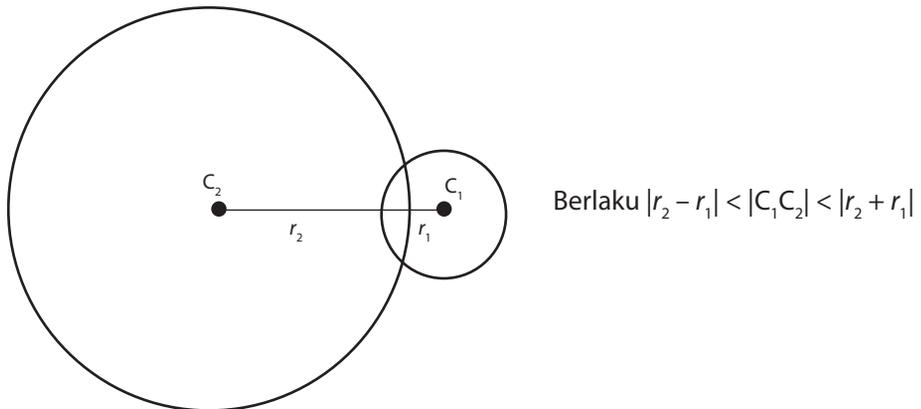
Berlaku $|r_2 - r_1| > |C_1C_2|$

4. L_1 saling lepas dengan L_2

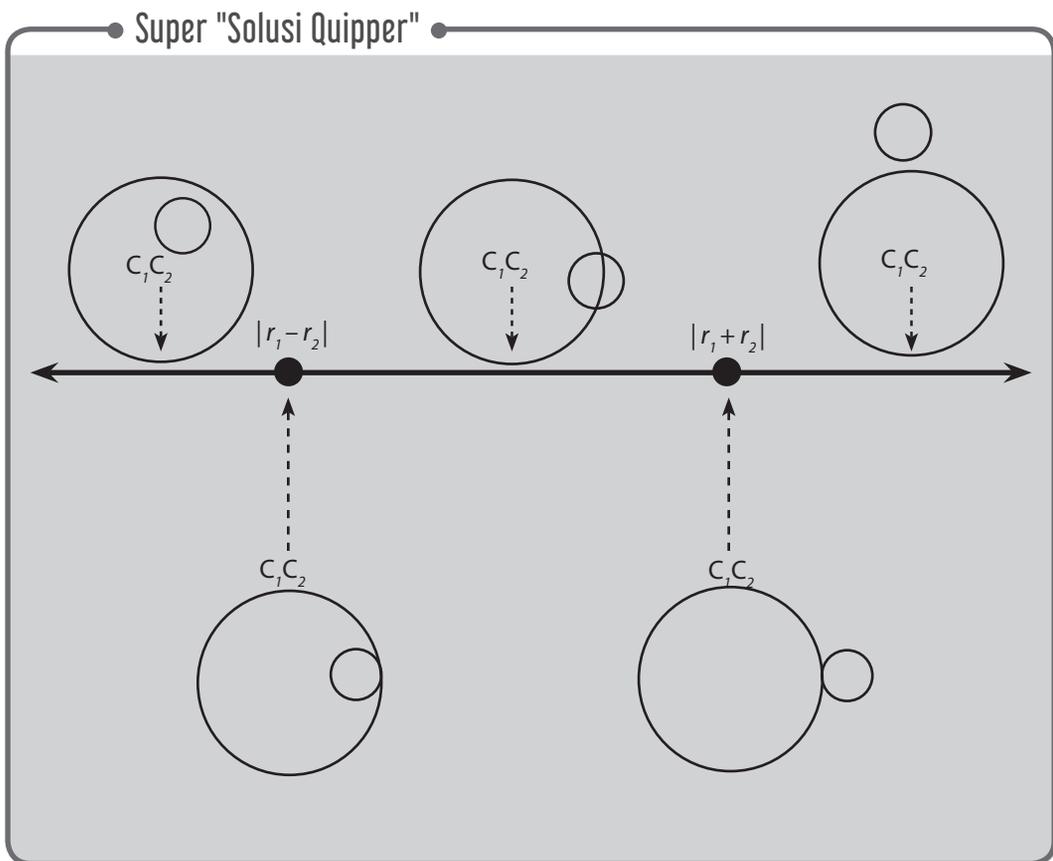


Berlaku $|r_2 + r_1| < |C_1C_2|$

5. L_1 berpotongan dengan L_2



Solusi Quipper untuk mengingat kedudukan lingkaran adalah sebagai berikut.



Solusi Quipper untuk menghitung jarak pusat C_1, C_2 adalah sebagai berikut.

• Super "Solusi Quipper" •

$$C_1 C_2 \left\{ \begin{array}{l} C_1(a_1, b_1) \\ C_2(a_2, b_2) \end{array} \right. - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

Contoh Soal 7

Tentukan hubungan lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ dengan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$!

Pembahasan:

Mula-mula, tentukan pusat dan jari-jari kedua lingkaran tersebut.

Dari lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$, diketahui nilai $A = -6$, $B = 8$, dan $C = 0$.

Pusat lingkaran:

$$\begin{aligned} C_1(a_1, b_1) &= C_1\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) \\ \Leftrightarrow C_1(a_1, b_1) &= C_1\left(-\frac{1}{2}(-6), -\frac{1}{2}(8)\right) \\ \Leftrightarrow C_1(a_1, b_1) &= C_1(3, -4) \end{aligned}$$

Jari-jari lingkaran:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - C} \\ \Leftrightarrow r_1 &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 - 0} \\ \Leftrightarrow r_1 &= 5 \end{aligned}$$

Dari lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$, diketahui nilai $A = -4$, $B = 6$, dan $C = -23$.

Pusat lingkaran:

$$\begin{aligned} C_2(a_2, b_2) &= C_2\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) \\ \Leftrightarrow C_2(a_2, b_2) &= C_2\left(-\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(6)\right) \\ \Leftrightarrow C_2(a_2, b_2) &= C_2(2, -3) \end{aligned}$$

Jari-jari lingkaran:

$$r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 - C}$$

$$\Leftrightarrow r_2 = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - (-23)}$$

$$\Leftrightarrow r_2 = 6$$

Selanjutnya, tentukan nilai $|r_2 - r_1|$, $|r_2 + r_1|$, dan $|C_1 C_2|$.

$$|r_2 - r_1| = |6 - 5| = 1$$

$$|r_2 + r_1| = |6 + 5| = 11$$

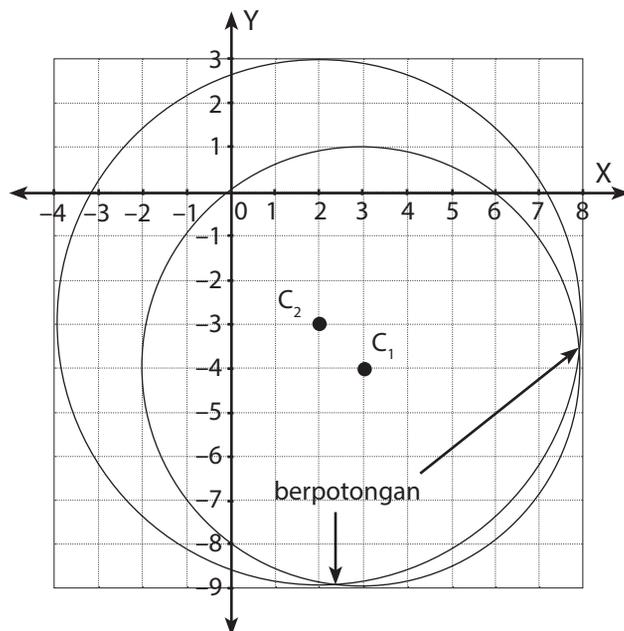
$$|C_1 C_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow |C_1 C_2| = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-4 - (-3))^2}$$

$$\Leftrightarrow |C_1 C_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow |C_1 C_2| = \sqrt{2}$$

Oleh karena $1 < \sqrt{2} < 11$, maka lingkaran L_1 berpotongan dengan lingkaran L_2 . Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut.



Jadi, hubungan kedua lingkaran tersebut adalah berpotongan.

Contoh Soal 8

Tentukan hubungan antara lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 10x + 4y - 167 = 0$ dengan lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 16y + 57 = 0$!

Pembahasan:

Mula-mula, tentukan pusat dan jari-jari kedua lingkaran tersebut.

Dari lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 10x + 4y - 167 = 0$, diketahui nilai $A = -10$, $B = 4$, dan $C = -167$.

Pusat lingkaran:

$$\begin{aligned}C_1(a_1, b_1) &= C_1\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) \\ \Leftrightarrow C_1(a_1, b_1) &= C_1\left(-\frac{1}{2}(-10), -\frac{1}{2}(4)\right) \\ \Leftrightarrow C_1(a_1, b_1) &= C_1(5, -2)\end{aligned}$$

Jari-jari lingkaran:

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{a^2 + b^2 - C} \\ \Leftrightarrow r_1 &= \sqrt{5^2 + (-2)^2 - (-167)} \\ \Leftrightarrow r_1 &= 14\end{aligned}$$

Dari lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 16y + 57 = 0$, diketahui nilai $A = 6$, $B = -16$, dan $C = 57$.

Pusat lingkaran:

$$\begin{aligned}C_2(a_2, b_2) &= C_2\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) \\ \Leftrightarrow C_2(a_2, b_2) &= C_2\left(-\frac{1}{2}(6), -\frac{1}{2}(-16)\right) \\ \Leftrightarrow C_2(a_2, b_2) &= C_2(-3, 8)\end{aligned}$$

Jari-jari lingkaran:

$$\begin{aligned}r_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2 - C} \\ \Leftrightarrow r_2 &= \sqrt{(-3)^2 + (8)^2 - (57)} \\ \Leftrightarrow r_2 &= 4\end{aligned}$$

Selanjutnya, tentukan nilai $|r_2 - r_1|$, $|r_2 + r_1|$, dan $|C_1C_2|$

$$|r_2 - r_1| = |4 - 14| = 10$$

$$|r_2 + r_1| = |4 + 14| = 18$$

$$|C_1C_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow |C_1C_2| = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-2 - 8)^2}$$

$$\Leftrightarrow |C_1C_2| = \sqrt{8^2 + (-10)^2}$$

$$\Leftrightarrow |C_1C_2| = \sqrt{164}$$

Oleh karena $10 < \sqrt{164} < 18$, lingkaran L_1 berpotongan dengan lingkaran L_2 .
Jadi, hubungan kedua lingkaran tersebut adalah berpotongan.

Contoh Soal 9

Tentukan hubungan lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ dengan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 12x - 4y - 41 = 0$!

Pembahasan:

• Super "Solusi Quipper" •

Lingkaran 1:

$$L_1 \begin{cases} C_1 = (-3, -2) \\ r_1 = \sqrt{9 + 4 + 3} = 4 \end{cases}$$

Lingkaran 2:

$$L_2 \begin{cases} C_2 = (-6, 2) \\ r_2 = \sqrt{36 + 4 + 41} = 9 \end{cases}$$

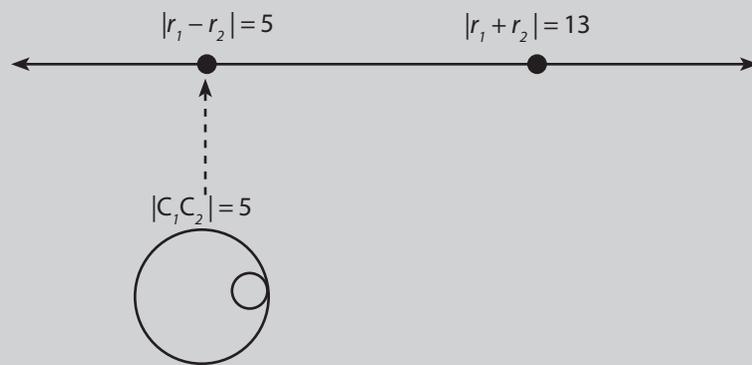
Dengan demikian, diperoleh:

$$C_1C_2 \begin{cases} (-3, -2) \\ (-6, 2) \end{cases} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$|r_1 + r_2| = |4 + 9| = 13$$

$$|r_1 - r_2| = |4 - 9| = -5$$

Jika digambarkan, akan diperoleh:



Jadi, hubungan kedua lingkaran tersebut adalah bersinggungan dalam.