



# MATEMATIKA PEMINATAN

## PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN EKSPONEN

### TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, kamu diharapkan memiliki kemampuan berikut.

1. Memahami bentuk-bentuk persamaan dan pertidaksamaan eksponen beserta solusinya.
2. Menentukan solusi persamaan eksponen berbasis konstanta.
3. Menentukan solusi persamaan eksponen berbasis fungsi.
4. Menentukan solusi persamaan eksponen berbentuk penjumlahan.
5. Menentukan solusi pertidaksamaan eksponen.

Persamaan eksponen adalah persamaan yang eksponennya memuat variabel. Persamaan eksponen dibedakan menjadi tiga, yaitu persamaan eksponen berbasis konstanta, persamaan eksponen berbasis fungsi, dan persamaan eksponen berbentuk penjumlahan.

### A. PERSAMAAN EKSPONEN BERBASIS KONSTANTA

Persamaan eksponen berbasis konstanta mempunyai dua bentuk umum seperti berikut.

1. Jika  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ,  $a > 0$  dan  $a \neq 1$ , maka  $f(x) = g(x)$ .
2. Jika  $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ ,  $a, b > 0$ ,  $a, b \neq 1$  dan  $a \neq b$ , maka  $f(x) = 0$ .

### Contoh Soal 1

Solusi dari persamaan  $2^{x+1} = 16$  adalah ....

**Pembahasan:**

Untuk menentukan solusinya, kita samakan terlebih dahulu basis pada kedua ruas.

$$2^{x+1} = 16$$

$$\Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^4$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Jadi, solusi dari persamaan  $2^{x+1} = 16$  adalah  $x = 3$ .

### Contoh Soal 2

Solusi dari persamaan  $3^{x+2} = 9^{x-2}$  adalah ....

**Pembahasan:**

Untuk menentukan solusinya, kita samakan terlebih dahulu basis pada kedua ruas. Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$3^{x+2} = (3^2)^{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^{2x-4}$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow -x = -6$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

Jadi, solusi dari persamaan  $3^{x+2} = 9^{x-2}$  adalah  $x = 6$

### Contoh Soal 3

Solusi dari persamaan  $4^{2x-1} = 5^{2x-1}$  adalah ....

**Pembahasan:**

Oleh karena basis kedua ruas berbeda dan mempunyai eksponen yang sama, maka berlaku:

$$4^{2x-1} = 5^{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Jadi, solusi dari persamaan  $4^{2x-1} = 5^{2x-1}$  adalah  $x = \frac{1}{2}$ .

### Contoh Soal 4

Solusi dari persamaan  $2^{x-1} 2^{x+1} = 4^{1-2x}$  adalah ....

#### Pembahasan:

Untuk menentukan solusinya, kita samakan terlebih dahulu basis pada kedua ruas. Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$2^{x-1} 2^{x+1} = 4^{1-2x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1+x+1} = 2^{2(1-2x)}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{2-4x}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow 6x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Jadi, solusi dari persamaan  $2^{x-1} 2^{x+1} = 4^{1-2x}$  adalah  $x = \frac{1}{3}$ .

### Contoh Soal 5

Solusi dari persamaan  $\frac{3^{x+1}}{27} = \left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^{x+2}$  adalah ....

#### Pembahasan:

Untuk menentukan solusinya, kita samakan terlebih dahulu basis pada kedua ruas. Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$\frac{3^{x+1}}{27} = \left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{x+1}}{3^3} = \left((3^{-2})^{\frac{1}{2}}\right)^{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+1-3} = (3^{-1})^{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-2} = 3^{-x-2}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = -x - 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Jadi, solusi dari persamaan  $\frac{3^{x+1}}{27} = \left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^{x+2}$  adalah  $x = 0$ .

### Contoh Soal 6

Solusi dari persamaan eksponen  $2^{2x^2-4x-6} = 6^{x^2-2x-3}$  adalah ....

#### Pembahasan:

Untuk menentukan solusinya, kita samakan terlebih dahulu bentuk eksponen pada kedua ruas. Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$2^{2x^2-4x-6} = 6^{x^2-2x-3}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2-4x-6} = 2^{x^2-2x-3} 3^{x^2-2x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2x^2-4x-6}}{2^{x^2-2x-3}} = 3^{x^2-2x-3}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x-3} = 3^{x^2-2x-3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ atau } x = -1$$

Jadi, solusi dari persamaan eksponen  $2^{2x^2-4x-6} = 6^{x^2-2x-3}$  adalah  $x = 3$  atau  $x = -1$ .

## B. PERSAMAAN EKSPONEN BERBASIS FUNGSI

Persamaan eksponen berbasis fungsi memiliki bentuk umum seperti berikut.

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$$

Solusi dari bentuk persamaan eksponen tersebut didapat dari 4 kondisi berikut.

1.  $g(x) = h(x)$
2.  $f(x) = 1$
3.  $f(x) = -1$ , dengan syarat  $g(x)$  dan  $h(x)$  sama-sama genap atau sama-sama ganjil
4.  $f(x) = 0$ , dengan syarat  $g(x), h(x) > 0$

## Contoh Soal 7

Himpunan penyelesaian dari persamaan eksponen  $(x-2)^{x^2-2x} = (x-2)^{x+4}$  adalah ....

**Pembahasan:**

$$(x-2)^{x^2-2x} = (x-2)^{x+4}$$

Solusi dari persamaan eksponen tersebut didapat dari 4 kondisi berikut.

- $x^2 - 2x = x + 4$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$   
 $\Leftrightarrow (x-4)(x+1) = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 4$  atau  $x = -1$
- $x - 2 = 1$   
 $\Leftrightarrow x = 3$
- $x - 2 = -1$   
 $\Leftrightarrow x = 1$

Sekarang periksa apakah untuk  $x = 1$ ,  $g(x)$  dan  $h(x)$  sama-sama genap atau ganjil.

Uji pangkat untuk ruas kiri:

$$x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \text{ (ganjil)}$$

Uji pangkat untuk ruas kanan:

$$x + 4 = 1 + 4 = 5 \text{ (ganjil)}$$

Oleh karena sama-sama ganjil, maka  $x = 1$  merupakan penyelesaian.

- $x - 2 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = 2$

Sekarang periksa apakah untuk  $x = 2$ ,  $g(x)$  dan  $h(x)$  sama-sama positif.

Uji pangkat untuk ruas kiri:

$$x^2 - 2x = (2)^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$$

Oleh karena 0 bukan bilangan positif, maka  $x = 2$  bukan penyelesaian.

Jadi, himpunan penyelesaian dari persamaan eksponen  $(x-2)^{x^2-2x} = (x-2)^{x+4}$  adalah  $\{-1, 1, 3, 4\}$ .

### C. PERSAMAAN EKSPONEN BERBENTUK PENJUMLAHAN

Persamaan eksponen berbentuk penjumlahan dinyatakan sebagai berikut.

$$a^{f(x)} + a^{g(x)} = c \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, \text{ dan } c \neq 0$$

Langkah-langkah menentukan solusi persamaan eksponen tersebut adalah sebagai berikut.

1. Uraikan bentuk eksponen hingga diperoleh jenis yang sama. Untuk menguraikannya, gunakan sifat-sifat eksponen berikut.
  - $a^{m+n} = a^m \times a^n$
  - $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
  - $(a^m)^n = a^{mn}$
2. Misalkan bentuk-bentuk eksponen yang sama dengan variabel tertentu.
3. Selesaikan persamaannya, kemudian substitusikan balik nilai variabel yang diperoleh pada permisalan.

### Contoh Soal 8

Solusi dari persamaan eksponen  $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$  adalah ....

#### Pembahasan:

Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2} = 20$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 2^x + 2^x = 20$$

Misalkan  $2^x = y$ , persamaan tersebut menjadi:

$$4y + y = 20$$

$$\Leftrightarrow 5y = 20$$

$$\Leftrightarrow y = 4$$

Substitusikan balik nilai  $y$  pada permisalan tersebut, sehingga diperoleh:

$$2^x = y$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 4$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Jadi, solusi dari persamaan eksponen  $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$  adalah  $x = 2$ .

### Contoh Soal 9

Jika solusi persamaan  $3^{2x-1} + 3^{4-2x}$  adalah  $x_1$  dan  $x_2$ , maka nilai dari  $x_1 + x_2$  adalah ....

#### Pembahasan:

Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$3^{2x-1} + 3^{4-2x} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{3} + \frac{3^4}{3^{2x}} = 12$$

Misalkan  $3^{2x} = p$ , persamaan tersebut menjadi:

$$\frac{p}{3} + \frac{81}{p} = 12$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 243 = 36p$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 36p + 243 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p - 27)(p - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 27 \text{ atau } p = 9$$

Substitusikan balik nilai  $p$  pada permisalan, sehingga diperoleh:

$$3^{2x} = 27 \text{ atau } 3^{2x} = 9$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} = 3^3 \text{ atau } 3^{2x} = 3^2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3 \text{ atau } 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ atau } x = 1$$

Misalkan  $x_1 = \frac{3}{2}$  dan  $x_2 = 1$ , maka  $x_1 + x_2 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ .

Jadi, dari  $x_1 + x_2$  adalah  $\frac{5}{2}$ .

#### • Super "Solusi Quipper" •

Bentuk  $a^{mx-p} + a^{a-mx} = c$  dengan akar - akar  $x_1$  dan  $x_2$  memiliki nilai  $x_1 + x_2$  yang dapat ditentukan berdasarkan persamaan berikut.

$$mx_1 - p = q - mx_2$$

Perhatikan pangkat masing-masing basis. Variabel pangkat pada basis sebelah kiri diubah menjadi  $x_1$  dan variabel pangkat pada basis sebelah kanan diubah menjadi  $x_2$ . Kemudian, anggap nilai keduanya sama.

$$2x_1 - 1 = 4 - 2x_2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$$

### Contoh Soal 10

Solusi dari persamaan eksponen  $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$  adalah ....

#### Pembahasan

Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

Misalkan  $3^x = p$ , persamaan tersebut menjadi:

$$p^2 - 6p - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p - 9)(p + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 9 \text{ atau } p = -3$$

Substitusikan balik nilai  $p$  pada permisalan, sehingga diperoleh:

$$3^x = 9 \text{ atau } 3^x = -3$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^2 \text{ atau } 3^x = -3 \text{ (tidak memenuhi)}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Jadi, solusi dari persamaan eksponen  $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$  adalah  $x = 2$ .

#### D. PERTIDAKSAMAAN EKSPONEN

Pertidaksamaan eksponen adalah pertidaksamaan yang eksponennya memuat variabel. Pertidaksamaan eksponen memiliki dua bentuk umum seperti berikut.

1. Untuk  $a > 1$ , jika  $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ , maka  $f(x) < g(x)$ .
2. Untuk  $0 < a < 1$ , jika  $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ , maka  $f(x) > g(x)$ .

Selain dua bentuk umum di atas, pertidaksamaan eksponen juga ada yang berbentuk penjumlahan.

$$a^{f(x)} + a^{g(x)} < c \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, \text{ dan } c \neq 0$$

Langkah-langkah menentukan solusi pertidaksamaan eksponen tersebut adalah sebagai berikut.

1. Uraikan bentuk eksponen hingga diperoleh jenis yang sama. Untuk menguraikannya, gunakan sifat-sifat eksponen.
2. Misalkan bentuk-bentuk eksponen yang sama dengan variabel tertentu.
3. Selesaikan pertidaksamaannya dengan menggunakan konsep penyelesaian pertidaksamaan hingga diperoleh interval untuk pemisalnya.
4. Substitusikan balik nilai yang diperoleh pada permisalan.

### Contoh Soal 11

Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen  $49^{3x-4} > 7^{x^2}$  adalah ....

#### Pembahasan:

Untuk menentukan solusinya, kita samakan terlebih dahulu basis pada kedua ruas. Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$\begin{aligned} 49^{3x-4} &> 7^{x^2} \\ \Leftrightarrow (7^2)^{3x-4} &> 7^{x^2} \\ \Leftrightarrow 7^{6x-8} &> 7^{x^2} \end{aligned}$$

Oleh karena  $a = 7 > 1$ , maka berlaku:

$$\begin{aligned} 6x - 8 &> x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x - 4)(x - 2) &< 0 \end{aligned}$$

Titik pembuat nol  $x = 4$  dan  $x = 2$ .

Tempatkan titik pembuat nol dalam garis bilangan. Kemudian, tentukan tanda daerahnya dengan titik uji. Oleh karena tanda pertidaksamaannya " $<$ ", maka bulatannya kosong dan titik pembuat nol tidak termasuk ke dalam nilai  $x$ .



Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen  $49^{3x-4} > 7^{x^2}$  adalah  $\{x \mid x \in R, 2 < x < 4\}$ .

### Contoh Soal 12

Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen  $\left(\frac{1}{125}\right)^{x+3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+5}$  adalah ....

#### Pembahasan:

Untuk menentukan solusinya, kita samakan terlebih dahulu basis pada kedua ruas. Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{125}\right)^{x+3} &\leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+5} \\ \Leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{x+3} &\leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+5} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+9} &\leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+5}\end{aligned}$$

Oleh karena  $a = \frac{1}{5} < 1$ , maka:

$$3x + 9 \geq 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow x \geq -4$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen tersebut adalah  $\{x | x \in R, x \geq -4\}$ .

### Contoh Soal 13

Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen  $2^{2x-5} - 3 \cdot 2^{x-3} + 1 < 0$  adalah ....

#### Pembahasan:

Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$\begin{aligned}2^{2x-5} - 3 \cdot 2^{x-3} + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{2^5} - 3 \cdot \frac{2^x}{2^3} + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{32}(2x)^2 - \frac{3}{8} \cdot 2^x + 1 &< 0\end{aligned}$$

Misalkan  $2^x = y$ , maka persamaan tersebut menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{32}y^2 - \frac{3}{8}y + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow y^2 - 12y + 32 &< 0 \\ \Leftrightarrow (y - 8)(y - 4) &< 0\end{aligned}$$

Titik pembuat nol  $y = 8$  dan  $y = 4$ .

Tempatkan titik pembuat nol dalam garis bilangan. Kemudian, tentukan tanda daerahnya dengan titik uji. Oleh karena tanda pertidaksamaannya " $<$ ", maka bulatannya kosong dan titik pembuat nol tersebut tidak termasuk ke dalam nilai  $y$ .



Berdasarkan garis bilangan tersebut, diketahui  $4 < y < 8$ .

Oleh karena  $y = 2^x$ , maka:

$$4 < 2^x < 8$$

$$\Leftrightarrow 2^2 < 2^x < 2^3$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 3$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen tersebut adalah  $\{x \mid x \in R, 2 < x < 3\}$

### Contoh Soal 14

Solusi dari pertidaksamaan eksponen  $2^{2x-1} - 2^x - 4 > 0$  adalah ....

#### Pembahasan:

Dengan menggunakan sifat-sifat eksponen, diperoleh:

$$\frac{2^{2x}}{2} - 2^x - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2^x)^2 - 2^x - 4 > 0$$

Misalkan  $2^x = p$ , maka persamaan tersebut menjadi:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}p^2 - p - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2p - 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow (p - 4)(p + 2) > 0$$

Titik pembuat nol  $p = 4$  dan  $p = -2$ .

Tempatkan titik pembuat nol dalam garis bilangan. Kemudian, tentukan tanda daerahnya dengan titik uji. Oleh karena tanda pertidaksamaannya " $>$ ", maka bulatannya kosong dan titik pembuat nol tidak termasuk ke dalam nilai  $p$ .



Berdasarkan garis bilangan tersebut, diketahui  $p < -2$  atau  $p > 4$

Oleh karena  $p = 2x$ , maka:

$$2^x < -2 \text{ atau } 2^x > 4$$

Untuk bentuk  $2^x < -2$ , tidak ada nilai  $x$  yang memenuhi karena bentuk  $a^x$  selalu bernilai positif. Dengan demikian, diperoleh:

$$2^x > 4$$

$$\Leftrightarrow 2^x > 2^2$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

Jadi, solusi dari pertidaksamaan eksponen  $2^{2x-1} - 2^x - 4 > 0$  adalah  $x > 2$ .