MATEMATIKA

KELAS XII - KURIKULUM GABUNGAN

Sesi 08

MENCARI MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI

Kita sudah belajar bagaimana menggambar daerah dari batas pertidaksamaan yang diketahui atau pun sebaliknya. Suatu daerah terdefinisi berisi sekumpulan titik-titik yang tak berhingga banyaknya. Jika diberikan suatu fungsi dalam bentuk $f(x) = ax + by + c$, kemudian ditanyakan di antara titik-titik pada daerah tersebut yang dapat menghasilkan nilai optimum (maksimum atau minimum) untuk fungsi tersebut. Jika kita telusuri satu per satu tentu hal itu mustahil. Ada dua metode yang digunakan untuk menentukan titik dan nilai optimum pada daerah terdefinisi, yaitu metode titik pojok dan metode garis selidik.

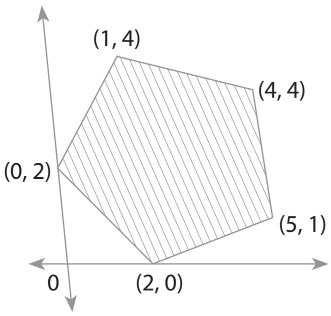
A. METODE TITIK POJOK

Metode titik pojok adalah metode pencarian titik dan nilai optimum dengan mencari titik sudut daerah terdefinisi. Karena ternyata dari hasil analisis sederhana, titik optimum akan selalu terjadi di titik pojok daerah. Langkah-langkah pencarian nilai optimum menggunakan metode ini adalah:

1. Definisikan daerah, jika belum ada.
2. Temukan titik pojok daerah, bila belum diketahui gunakan metode eliminasi.
3. Substitusikan titik pojok ke dalam fungsi objektif yang diberikan, kemudian bandingkan mana yang paling optimum.

CONTOH SOAL

1. Pada gambar di bawah, daerah yang diarsir merupakan grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier.



Nilai maksimum dari bentuk objektif 5x + y dengan x,y ∈ Chimpunan penyelesaian itu adalah ....

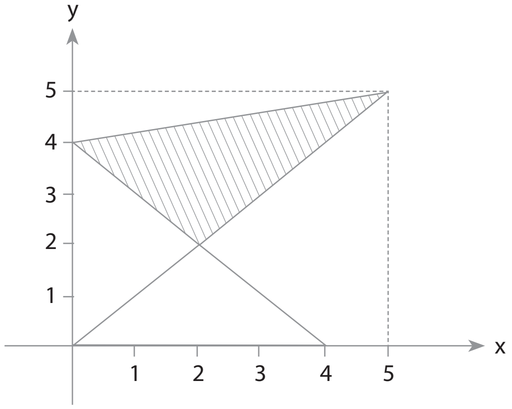
A. 21
B. 24
C. 26
D. 27
E. 30

Pembahasan

Dengan menggunakan titik pojok, maka maksimum atau minimum dari fungsi sasaran 5x + 6y terjadi di salah satu dari kelima titik pojoknya. Perhatikan tabel berikut ini!

No	Titik Pojok	5x + y	Keterangan
1	(0,2)	5.0 + 2 = 2	Minimum
2	(2,0)	5.2 + 0 = 10	
3	(5,1)	5.5 + 1 = 26	Maksimum
4	(4,4)	5.4 + 4 = 24	
5	(1,5)	5.1 + 5 = 10	

2. Nilai minimum f(x, y) = 2x + 3y untuk x,y di daerah yang diarsir adalah ....



A. 25
B. 15
C. 12
D. 10
E. 5

Pembahasan

Pada soal ini ketiga titiknya telah diketahui, yaitu:

(0, 4) dengan nilai

(2, 2) dengan nilai

(5, 5) dengan nilai

Maka, terlihat jelas nilai minimumnya adalah 10.

3. Nilai maksimum pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan

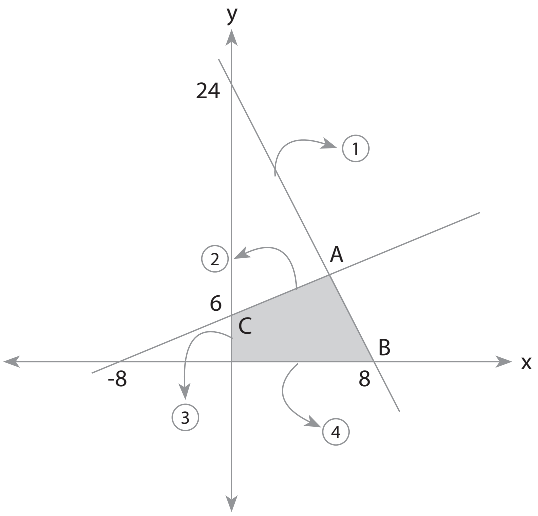
$$\begin{cases} 3x + y \leq 24 \\ -x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

adalah ....

A. 32
B. 26
C. 24
D. 16
E. 12

Pembahasan

Langkah pertama: gambar daerah penyelesaiannya



Langkah ke dua: menentukan koordinat titik pojok. Terlihat disana ada tiga titik pojok selain (0,0).

Titik A adalah titik perpotongan garis (1): 3x + y = 24 dengan garis (2): -x + 2y = 8. Koordinatnya dengan mudah dapat dicari menggunakan eliminasi:

$$3x + y = 24 \;|\times 2$$
$$\underline{-x + 2y = 8} \;|\times 1$$
$$6x + 2y = 48$$
$$\underline{-x + 2y = 8} \;\; -$$
$$7x = 40$$
$$x = \frac{40}{7}$$

$$3x + y = 24$$
$$3 \cdot \frac{40}{7} + y = 24$$
$$y = \frac{48}{7} \rightarrow A\left(\frac{40}{7}, \frac{48}{7}\right)$$

Sedangkan titik B dan C sudah jelas. Perhatikan tabel berikut:

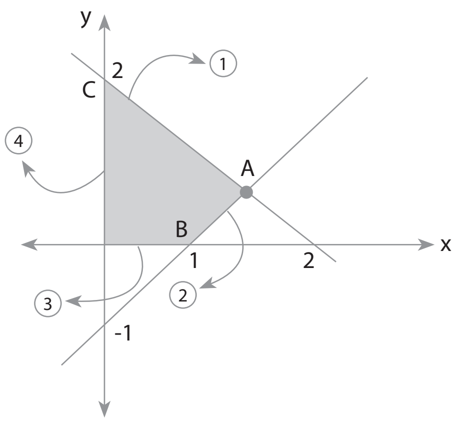
No	Titik Pojok	2x + 3y	Keterangan
1	$\left(\frac{40}{7},\frac{48}{7}\right)$	$2\left(\frac{40}{7}\right)+3\left(\frac{48}{7}\right)=32$	maksimum
2	(8, 0)	$2.8+3.0=16$	
3	(5, 1)	$2.5+3.1=13$	maksimum

4. Jika (x, y) terletak pada daerah yang dibatasi oleh $x \geq 0$, $y \geq 0$ dan $y + 1 \leq x \leq 2 - y$, maka nilai terbesar dari $2x + y$ adalah ....
   A. 3,5
   B. 4
   C. 4,5
   D. 5
   E. 5,5

   Pembahasan

   Batas diatas dapat dinyatakan $x \geq 0; y \geq 0; y + 1 \leq x; x \leq 2 - y$ atau $x \geq 0; y \geq 0; x - y \geq 1; x + y \leq 2$

   Maka gambar yang memenuhi adalah



   Titik A adalah perpotongan antara garis (1): $x - y = 1$ dengan garis (2): $x + y = 2$, dengan eliminasi akan didapatkan

$$\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \underline{x + y = 2} + \\ 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ dengan substitusi balik } y = \frac{1}{2} \end{array}$$

Kita masukkan ke tabel

No	Titik Pojok	2x + y	Keterangan
1	$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$	$2\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3{,}5$	maksimum
2	(1, 0)	$2 . 1 + . 0 = 2$	minimum
3	(5, 1)	$2 . 0 + 2 = 2$	minimum

5. Nilai maksimum fungsi objektif (tujuan) $f(x, y) = 4x + 3y$ dengan kendala $2x + 3y \leq 18$, $x \geq 3$ dan $y \geq 2$ adalah .... (SBMPTN tahun 2012)
   A. 26
   B. 30
   C. 35
   D. 40
   E. 43

   Pembahasan

   Terlihat dari gambar di atas titik A, yaitu (3, 2) sedangkan titik B dan C perlu dicari dengan cara eliminasi dan substitusi.

   Titik B adalah hasil titik potong antara garis $2x + 3y = 18$ dan $y = 2$, maka kita lakukan proses substitusi.

   $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 2x + 3(2) &= 18 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

   Maka titik B (6, 2)

   Titik C adalah hasil perpotongan dengan $2x + 3y = 18$ dengan $x = 3$, kita lakukan proses substitusi

   $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 2(3) + 3y &= 18 \\ 3y &= 12 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

   Maka titik C (3, 4)

Titik pojok dan nilai fungsi objektifnya berturut-turut:

(x, y)	f(x, y) = 4x + 3y	Keterangan
(3, 2)	12 + 6 = 18	
(6, 2)	24 + 6 = 30	maksimum
(3, 4)	12 + 12 = 24	

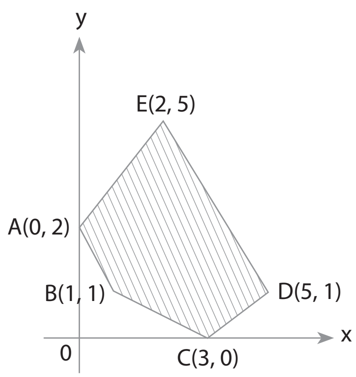
B. METODE GARIS SELIDIK

Metode ini biasanya digunakan untuk daerah yang memiliki titik pojok banyak dan lebih dari satu titik belum diketahui. Langkah mencari titik dan nilai optimum dengan cara ini adalah:

1. Tentukan daerah pertidaksamaan dengan gambar seakurat mungkin.
2. Misal fungsi objektif didefinisikan $f(x) = ax + by + c$. Gambar garis selidik dari $ax + by = p$, di mana p adalah bilangan yang bias dibagi oleh a dan b yang membuat $ax + by = p$ mudah untuk digambar.
3. Geser garis dari kiri ke kanan sejajar jika $a > 0$, atau dari kanan ke kiri jika $a < 0$. Maka, optimum baik maksimum ataupun minimum dapat ditentukan dengan cara:
   - Titik yang pertama tersentuh minimum.
   - Titik yang terakhir tersentuh maksimum.
   - Masukkan titik optimum ke fungsi objektif.

CONTOH SOAL

1. Daerah yang diarsir adalah daerah himpunan penyelesaian permasalahan program linier.

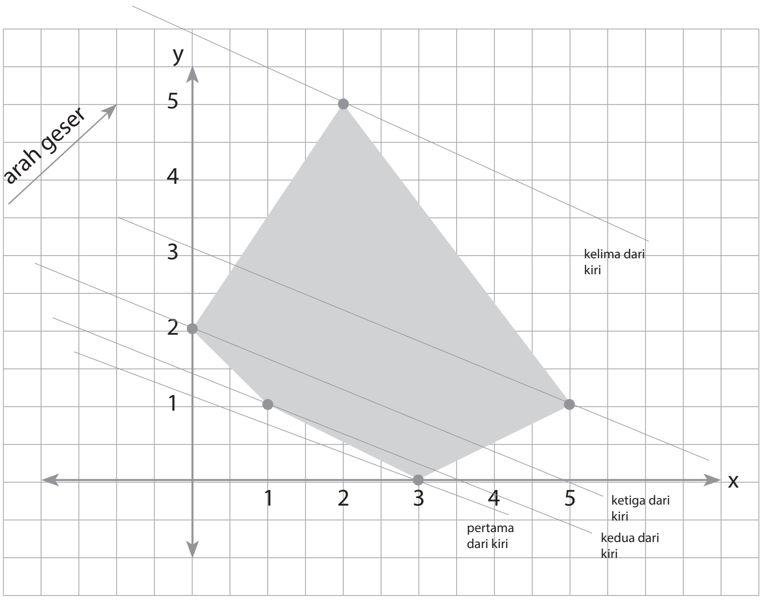


Nilai maksimum dari fungsi tujuan $z = 2x + 5y$ adalah ....

A. 6
B. 7
C. 10
D. 15
E. 29

Pembahasan

Salah satu keunggulan metode garis selidik adalah kalian tidak perlu memasukkan nilai titik pojok satu per satu untuk mendapatkan nilai paling optimum dari perbandingan, akan tetapi cukup satu titik yang dimasukkan, karena titik itu sudah diketahui pasti optimum. Pertama kita gambar garis $2x + 5y = 10$ (karena 10 bisa dibagi 2 dan 5), bentuk gambarnya menjadi seperti ini



Terlihat titik (2,5) adalah titik terakhir yang tersentuh oleh pergeseran garis. Maka

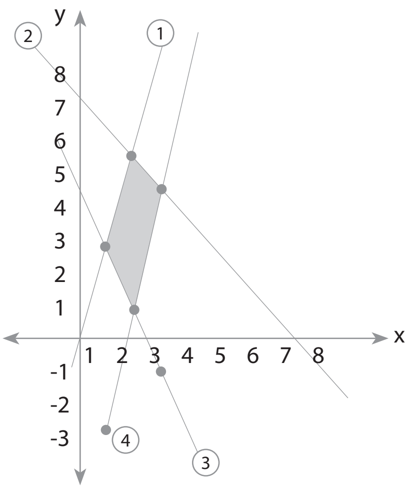
$Z_{maks} = Z(2, 5) = 2.\,2 + 5.\,5 = 29$

2. Nilai minimum dari $z = -2x + y$ dari daerah yang memiliki batas-batas sebagai berikut:

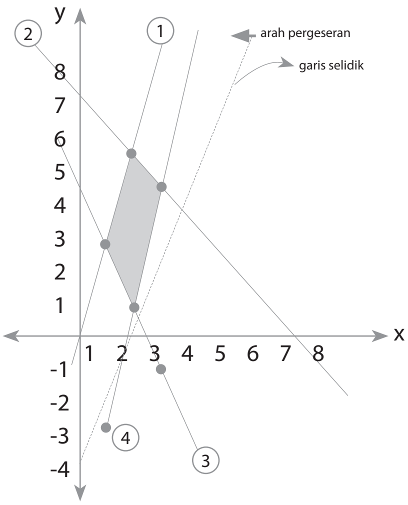
$3x \geq y; x + y \leq 8; 4x \leq y + 7; 2x + y \geq 5$ adalah …

Pembahasan

Langkah yang pertama adalah menggambar daerah yang dimaksud. Dengan mengubah menjadi bentuk umum pertidaksamaannya, diikuti dengan mencari dua titik yang dilewati oleh persamaan garisnya akan didapatkan gambar sebagai berikut:



Kemudian kita gambar garis yang mewakili fungsi objektifnya. Misalnya garis yang akan kita gambar adalah -2x + y = 4, maka kita akan mendapatkan posisi garis selidik seperti berikut:



Dengan menggeser garis selidik dari kanan ke kiri (karena koefisien x negatif), akan didapati titik potong garis 3 dan garis 4 adalah titik minimum. Titik tersebut dapat kita cari dengan menggunakan metode eliminasi.

$$\begin{aligned} 4x - y &= 7 \\ \underline{2x + y} &\underline{= 5 \quad +} \\ 6x &= 12 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

dengan substitusi balik, didapat y = 1.

Maka titik minimumnya adalah (2, 1) sedangkan nilai minimumnya adalah

$Z_{min} = z(2, 1) = -2 . 2 + 1 = -3$

C. MASALAH MAKSIMUM DAN MINIMUM PADA SOAL CERITA

Langkah mencari nilai maksimum dan minimum pada soal cerita adalah sebagai berikut:

1. Bentuk model pertidaksamaannya.
2. Ketahui fungsi objektifnya.
3. Gambar daerah penyelesaiannya.
4. Bila titik sudut daerah yang belum diketahui sedikit, gunakan metode titik sudut, apabila titik sudut daerah yang belum diketahuinya banyak gunakan metode garis selidik.
5. Pada metoda titik sudut, masukkan semua titik pojok yang diketahui pada fungsi objektifnya, kemudian bandingkan mana yang paling optimum. Pada metode garis selidik, setelah dilakukan pergeseran dan didapat titik optimumnya, sutitusikan titik optimumnya pada fungsi objektifnya.

CONTOH SOAL

1. Luas daerah parkir 1.760 m^2. Luas rata-rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil besar 20 m^2. Daya tampung maksimum hanya 200 kendaraan, biaya parkir mobil kecil Rp5.000,00/jam dan mobil besar Rp8.000,00/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang pergi dan datang, penghasilan maksimum tempat parkir adalah ....

Pembahasan

x= banyaknya mobil kecil yang terparkir dalam satu jam

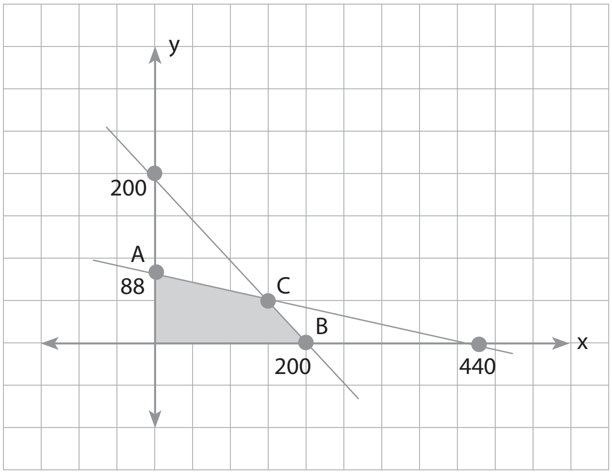
y= banyaknya mobil besar yang terparkir dalam satu jam

Tabel keterkaitan

Benda	Banyaknya	Luas lahan	Biaya
Mobil kecil	x	4x	5.000x
Mobil besar	y	20y	8.000y
Kapasitas	≤ 200	≤1760	z = 5.000x + 8.000y

Model matematikanya adalah $x + y \leq 200$, $4x + 20y \leq 1.760$ atau $x + y \leq 200$, $x + 5y \leq 440$, dengan $x \geq 0, y \geq 0$.

Sedangkan fungsi objektifnya adalah $z = f(x, y) = 5.000x + 8.000y$, maka gambar daerahnya adalah sebagai berikut:



Kita gunakan metode titik pojok. Salah satu titik yaitu titik C belum diketahui, tetapi bisa dengan mudah dicari dengan eliminasi

$$\begin{array}{r|l} x + 5y = 440 & \\ x + y = 200 & - \\ \hline 4y = 240 & \\ y = 60 & \end{array}$$

Dengan substitusi balik nilai didapat nilai x = 140 maka C (140, 60).

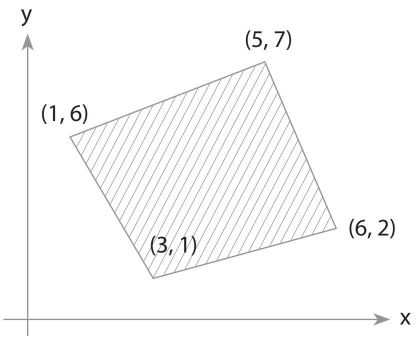
Kita substitusikan semua titik sudut yang telah diketahui:

Titik sudut	z = 5.000x + 8.000y	Keterangan
A(0, 88)	z = 5.000(0) + 8.000(88) = Rp704.000	Minimum
B(200, 0)	z = 5.000(200) + 8.000(0) = Rp1.000.000	
C(140, 60)	z = 5.000(140) + 8.000(60) = Rp1.180.000	Maksimum

Maka pendapatan maksimumnya adalah Rp1.180.000,00.

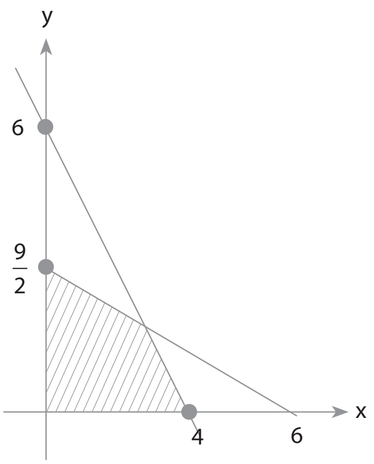
LATIHAN SOAL

1. Nilai maksimum $z = 2x + 5y$ pada gambar berikut adalah ....



A. 45
B. 46
C. 47
D. 48
E. 49

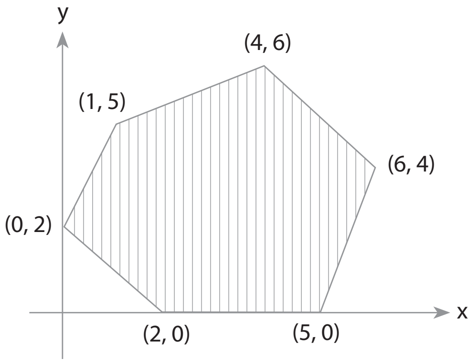
2. Nilai minimum dari   pada gambar di bawah adalah ....



A. -6
B. -4
C. 4
D. 9
E. 10

3. Nilai maksimum fungsi $f(x, y) = 3x + y$ pada suatu daerah yang memiliki batas $5x + 2y \leq 12$, $x + y \geq 3$ dan $x \geq 0$ adalah ....
   A. 5
   B. 6
   C. 7
   D. 8
   E. 9

4. *Perhatikan gambar berikut!*



   Nilai maksimum dari $z = 5x + 3y$ pada daerah arsiran di samping adalah ....
   A. 35
   B. 36
   C. 39
   D. 40
   E. 42

5. Nilai maksimum $f(x, y) = 6x + y$ pada daerah yang memiliki batas pertidaksamaan

$$\begin{cases} x + y \leq 7 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$ adalah ....

   A. 7
   B. 14
   C. 22
   D. 28
   E. 30

6. Nilai minimum dari z = f(x, y) = -3x + 2y pada daerah dengan batas $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 2x - 5y \leq -1 \\ 4x - 3y \geq -9 \end{cases}$ adalah ....

A. -6
B. -5
C. -4
D. -3
E. -2

7. Nilai minimum dari bentuk 3x + y pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan:

$2x + y \geq 4$, $x + y \geq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah .... (Ebtanas ’00 IPS)

A. 9
B. 5
C. 4
D. 3
E. 0

8. Disebuah kantin, Ani dan kawan-kawan membayar tidak lebih dari Rp35.000,00 untuk 4 mangkok bakso dan 6 gelas es yang dipesannya, sedangkan Adi dan kawan-kawan membayar tidak lebih dari Rp50.000,00 untuk 8 mangkok bakso dan 4 gelas es. Jika kita memesan 5 mangkok bakso dan 3 gelas es, maka maksimum yang harus kita bayar adalah .... (UM UGM ’04)

A. Rp27.500,00
B. Rp30.000,00
C. Rp32.500,00
D. Rp35.000,00
E. Rp37.500,00

9. Rokok A yang harga belinya Rp1.000,00 dijual dengan harga Rp1.100,00 per bungkus sedangkan rokok B yang harga belinya Rp1.500,00 dijual dengan harga Rp1.700,00 per bungkus. Seorang pedagang rokok yang mempunyai modal Rp300.000,00 dan kiosnya dapat menampung paling banyak 250 bungkus rokok akan mendapat keuntungan maksimum jika ia membeli .... (UMPTN ’00 Rayon B)

A. 150 bungkus rokok A dan 100 bungkus rokok B.
B. 100 bungkus rokok A dan 150 bungkus rokok B.
C. 250 bungkus rokok A dan 200 bungkus rokok B.
D. 250 bungkus rokok A saja.
E. 200 bungkus rokok B saja.

10. Seorang penjahit membuat 2 jenis pakaian untuk dijual, pakaian jenis I memerlukan 2 m katun dan 4 m sutera, dan pakaian jenis II memerlukan 5 m katun dan 3 m sutera. Bahan katun yang tersedia adalah 70 m dan sutera yang tersedia adalah 84 m. Pakaian jenis I dijual dengan laba Rp25.000,00 dan pakaian jenis II mendapat laba Rp50.000,00. Agar ia memperoleh laba yang sebesar-besarnya, maka banyak pakaian masing-masing adalah ...

A. Pakaian jenis I = 15 potong dan jenis II = 8 potong.
B. Pakaian jenis I = 8 potong dan jenis II = 15 potong.
C. Pakaian jenis I = 20 potong dan jenis II = 3 potong.
D. Pakaian jenis I = 13 potong dan jenis II = 10 potong.
E. Pakaian jenis I = 10 potong dan jenis II = 13 potong.

KUNCI JAWABAN SOAL LATIHAN

1.	6. C
2.	7. C
3. C	8. C
4. E	9. E
5. E	10. A