

MATEMATIKA



BARISAN DAN DERET ARITMETIKA

A. BARISAN ARITMETIKA

a. Definisi Barisan

Barisan bilangan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ dengan $n \in \text{Asli}$, disebut barisan aritmetika jika dan hanya jika $U_{n+1} - U_n = b$. Di mana b adalah beda barisan yang selalu tetap dan U_n adalah suku ke- n .

CONTOH SOAL

1. Selidikilah apakah barisan-barisan bilangan berikut termasuk barisan aritmetika

- a) 4, 7, 10, 13, 16, ...
- b) 8, 4, 0, -4, -8, ...
- c) 2, 4, 8, 16, 32, ...

Pembahasan:

- a) Barisan aritmetika karena $7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 16 - 13 = 3$. Beda barisan aritmetikanya adalah 3.
- b) Barisan aritmetika karena $4 - 8 = 0 - 4 = -4 - 0 = -8 - (-4) = -4$. Beda barisan aritmetikanya adalah -4.
- c) Bukan barisan aritmetika karena $4 - 2 \neq 8 - 4$ atau $2 \neq 4$.

2. Tiga bilangan $2a$, $3a + 1$, 10 membentuk barisan aritmetika. Nilai a yang memenuhi adalah

Pembahasan:

Kembali ke definisi barisan aritmetika

$$3a + 1 - 2a = 10 - (3a + 1) = b$$

Perhatikan ruas kiri dan tengah

$$3a + 1 - 2a = 10 - (3a + 1)$$

$$a + 1 = 9 - 3a$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

3. Tiga bilangan $3x$, $2x + 2$, $2x$ membentuk barisan aritmetika. Suku ke 3 barisan itu adalah

Pembahasan:

Kembali ke definisi barisan aritmetika

$$(2x + 2) - (3x) = (2x) - (2x + 2)$$

$$-x + 2 = -2$$

$$-x = -4$$

$$x = 4$$

Substitusi balik $x = 4$ ke barisan bilangan

$$3(4), 2(4) + 2, 2(4) \cong 12, 10, 8$$

Suku ke-3nya adalah 8.

b. Suku ke-n Barisan Aritmetika

Suku ke- n dapat dicari dengan dua cara. Pertama dengan menelusuri satu persatu (cara yang kurang praktis). Kedua dengan menggunakan formula suku ke- n . Perhatikan barisan bilangan aritmetika berikut yang suku pertamanya (U_1) dinotasikan dengan a .

Dapat ditarik kesimpulan bahwa dengan $n \in$ bilangan asli

$$U_n = a + (n - 1)b$$

CONTOH SOAL

1. Suku ke-20 dari bilangan 2, 6, 10, 14, ..., adalah

Pembahasan:

$$a = 2, b = 10 - 6 = 4$$

$$U_{20} = a + (20 - 1)b$$

$$= 2 + 19 \cdot 4$$

$$= 2 + 76$$

$$= 78$$

2. Barisan aritmetika 8, 5, 2, -1, ... memiliki suku ke-p -139. Nilai p adalah

Pembahasan:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_p = a + (p - 1)b$$

$$-139 = 8 + (p - 1)(-3)$$

$$-139 = 8 - 3p + 3$$

$$-150 = -3p$$

$$3p = 150$$

$$p = 50$$

Kesimpulannya, -139 adalah suku ke-50.

3. Banyaknya bilangan kelipatan 3 antara 10-100 adalah

Pembahasan:

Kita rincikan dulu bilangan kelipatan 3 antara 10-100, yaitu

12, 15, 18, 21, 24, ..., 99

barisan tersebut membentuk barisan aritmetika dengan $a = 12$, $b = 15 - 12 = 3$. Perhatikan banyak suku suatu barisan aritmetika ditentukan oleh urutan suku terakhir.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$99 = 12 + (n - 1) \cdot 3$$

$$99 = 12 + 3n - 3$$

$$99 = 9 + 3n$$

$$3n = 90$$

$$n = 30$$

Kesimpulan ada 30 bilangan kelipatan 3 antara 10 - 100

4. Suku ke-10 barisan aritmetika adalah 50, dan suku ke-14 barisan tersebut adalah 62. Suku ke-20 barisan tersebut adalah

Pembahasan:

$$\text{Diketahui } U_{10} = 50 \text{ atau } a + 9b = 50 \dots(1)$$

$$U_{14} = 62 \text{ atau } a + 13b = 62 \dots(2)$$

Persamaan (1) dan (2) adalah sistem persamaan linear dua peubah (a, b), yang solusinya bisa menggunakan proses eliminasi-substitusi.

$$a + 13b = 62$$

$$\underline{a + 9b = 50 \quad -}$$

$$4b = 12$$

$$b = 3$$

Substitusi $b = 3$ ke persamaan (1)

$$a + 9b = 50$$

$$a + 9(3) = 50$$

$$a + 27 = 50$$

$$a = 23$$

sehingga dengan $a = 23$ dan $b = 3$ kita bisa menemukan suku ke-20

$$U_{20} = a + 19b$$

$$= 23 + 19(3)$$

$$= 23 + 57$$

$$= 80$$

5. Diketahui pada suatu barisan aritmetika suku ke-20 adalah $5x + 10$, suku ke-15 adalah $4x + 7$ dan suku ke-5 adalah $x + 13$. Nilai x yang memenuhi adalah

Pembahasan:

$$U_{20} = 5x + 10 \rightarrow a + 19b = 5x + 10 \quad \dots(1)$$

$$U_{15} = 4x + 7 \rightarrow a + 14b = 4x + 7 \quad \dots(2)$$

$$U_5 = 2x + 1 \rightarrow a + 4b = x + 13 \quad \dots(3)$$

Eliminasi persamaan (1) dan (2)

$$a + 19b = 5x + 10$$

$$\underline{a + 14b = 4x + 7 \quad -}$$

$$5b = x + 3$$

$$b = \frac{x + 3}{5}$$

Substitusi $b = \frac{x+3}{5}$ ke persamaan (2)

$$a + 14\left(\frac{x+3}{5}\right) = 4x + 7$$

$$5a + 14x + 42 = 20x + 35$$

$$5a = 6x - 7$$

$$a = \frac{6x - 7}{5}$$

Substitusikan nilai a dan b ke persamaan (3)

$$a + 4b = x + 13$$

$$\frac{6x - 7}{5} + 4\frac{x + 3}{5} = x + 13$$

$$6x - 7 + 4(x + 3) = 5x + 65$$

$$10x + 5 = 5x + 65$$

$$5x = 60$$

$$x = 12$$

c. Suku Tengah Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika dengan banyak suku ganjil selalu memiliki suku tengah yang dinotasikan dengan U_t . Formula untuk U_t adalah

$$U_t = \frac{a + U_n}{2}$$

dengan U_n suku terakhir dan $t = \frac{n+1}{2}$

CONTOH SOAL

1. Suku tengah suatu barisan aritmetika bernilai 15. Bila banyak suku barisan dan suku ke-4 berturut-turut 11 dan -3, nilai suku terakhirnya adalah

Pembahasan:

Diketahui $U_t = 15$

Dengan $n = 11$ sehingga

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{n+1}{2} \\
 &= \frac{11+1}{2} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

Suku tengah adalah suku ke-6 atau $U_6 = 15$

$$U_6 = a + 5b = 15 \quad \dots(1)$$

Diketahui $U_4 = -3$ dengan

$$U_4 = a + 3b = -3 \quad \dots(2)$$

Dengan proses eliminasi

$$a + 5b = 15$$

$$\underline{a + 3b = -3 \quad -}$$

$$2b = 18$$

$$b = 9$$

Dengan proses substitusi $b = 9$ pada persamaan (1)

$$a + 45 = 15$$

$$a = -30$$

sehingga suku terakhir U_{11}

$$U_{11} = a + 10b$$

$$= -30 + 10(9)$$

$$= -60$$

d. Sisipan Bilangan pada Barisan Aritmetika

Diketahui $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ barisan aritmetika dengan beda b . Bila disisipkan di setiap 2 bilangan yang berdekatan k bilangan sehingga barisan bilangan yang terbentuk adalah barisan aritmetika baru dengan beda b' , maka

$$b' = \frac{b}{k+1}$$

dan suku pertama barisan baru sama dengan suku pertama barisan sebelumnya.

CONTOH SOAL

Di antara bilangan 4, 7, 10 disisipkan 2 bilangan sehingga bilangan tersebut berbentuk aritmetika. Maka suku ke-5 barisan baru adalah

Pembahasan:

$a = 4$, $b = 3$, dan $k = 2$ maka

$$\begin{aligned} b' &= \frac{b}{k+1} \\ &= \frac{3}{2+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} U_5 &= a + 4b' \\ &= 4 + 4(1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

B. DERET ARITMETIKA

a. Jumlah n Suku Pertama

Diketahui barisan aritmetika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ dengan beda b . Deret aritmetika adalah penjumlahan n -suku pertama dari suku-suku barisan aritmetika yang dinotasikan dengan S_n

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n$$

Jumlah n suku pertama dapat dihitung dengan cara manual bila nilai n masih kecil, tetapi bila nilai n besar maka formula yang digunakan adalah

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

dengan U_n = suku terakhir

Bila suku terakhir tidak diketahui maka kita bisa menggunakan

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

CONTOH SOAL

1. Jumlah 50 suku pertama dari barisan aritmetika 4, 7, 10, 13, ... adalah

Pembahasan:

Diketahui $a = 4$, $b = 3$, dan $n = 50$, maka

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$\begin{aligned} s_{50} &= \frac{50}{2}(2 \cdot 4 + (50-1)3) \\ &= 25(8 + 49 \cdot 3) \\ &= 3875 \end{aligned}$$

2. Jumlah bilangan kelipatan 3 antara 10 sampai dengan 100 adalah

Pembahasan:

Jumlah bilangan kelipatan 3 antara 10 sampai dengan 100 adalah

$$S_n = 12 + 15 + 18 + 21 + \dots + 99$$

di mana $a = 12$, $b = 15$, banyak suku 30 (lihat pembahasan sebelumnya)

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{30}{2}(12 + 99) \\ &= 15(111) \\ &= 1665 \end{aligned}$$

3. Suku ke-9 dan suku ke-21 dari suatu deret aritmetika berturut-turut adalah 12 dan 72. Jumlah 10 suku pertama deret itu adalah

Pembahasan:

- $U_{21} = a + 20b = 72$
 $U_9 = a + 8b = 12$ -

 $12b = 60$
 $b = 5$
- $a + 8b = 12$
 $a + 8(5) = 12$
 $a + 40 = 12$
 $a = -28$

maka

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{10}{2}(2a + 9b) \\ &= 5(2(-28) + 9.5) \\ &= 5(-56 + 45) \\ &= -55 \end{aligned}$$

4. Lima belas bilangan membentuk deret aritmetika dengan beda positif. Jika jumlah suku ke-13 dan ke-15 sama dengan 188 dan selisih suku ke-13 dan ke-15 sama dengan 14, maka jumlah dari lima suku terakhir adalah (SPMB 04 Regional I)
- A. 362
B. 384
C. 425
D. 428
E. 435

Pembahasan:

- $U_{13} + U_{15} = 188$
 $a + 12b + a + 14b = 188$
 $2a + 26b = 188$
 $a + 13b = 94 \quad \dots(1)$
- $U_{15} - U_{13} = 14$
 $(a + 14b) - (a + 12b) = 14$
 $2b = 14$
 $b = 7$
- $a + 13b = 94$
 $a + 13(7) = 94$
 $a + 91 = 94$
 $a = 3$

maka jumlah 5 suku terakhir

$$\begin{aligned} U_{11} + U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{15} &= a + 10b + a + 11b + a + 12b + a + 13b + a + 14b \\ &= 5a + 60b \\ &= 5(3) + 60(7) \\ &= 435 \end{aligned}$$

5. Suatu barisan aritmetika memiliki formula untuk $U_n = 3n + 2$, maka jumlah n suku pertamanya adalah

Pembahasan:

$$U_n = 3n + 2$$

$$U_1 = a = 3(1) + 2 = 5$$

maka

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a + U_n) \\ &= \frac{n}{2}(5 + (3n + 2)) \\ &= \frac{n}{2}(3n + 7) \\ &= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n \end{aligned}$$

b. Sifat Jumlah n Suku Pertama

$$S_n - S_{n-1} = U_n$$

CONTOH SOAL

Diketahui jumlah n suku pertama deret aritmetika $S_n = 3n^2 + 2n$, maka formula untuk U_n adalah

Pembahasan:

$$\begin{aligned} U_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 + 2n - (3(n-1)^2 + 2(n-1)) \\ &= 3n^2 + 2n - (3(n^2 - 2n + 1) + 2n - 2) \\ &= 3n^2 + 2n - (3n^2 - 6n + 3 + 2n - 2) \\ &= 3n^2 + 2n - (3n^2 - 4n + 1) \\ &= 6n - 1 \end{aligned}$$

LATIHAN SOAL

1. Suku ke-4 dan ke-9 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 110 dan 150. Suku ke-30 barisan tersebut adalah SOAL UN SMA IPA
 - A. 308
 - B. 318
 - C. 326
 - D. 344
 - E. 354
2. Diketahui barisan aritmetika dengan $U_1 + U_{10} + U_{19} = 96$. Suku ke-10 barisan tersebut = SOAL UN SMA IPA
 - A. 22
 - B. 27
 - C. 32
 - D. 37
 - E. 42
3. Suku keempat dan suku ketujuh suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 17 dan 29. Suku barisan ke-25 adalah SOAL UN
 - A. 97
 - B. 101
 - C. 105
 - D. 109
 - E. 113
4. Suku ke-10 dari barisan 3, 5, 7, 9, ... adalah
 - A. 11
 - B. 15
 - C. 19
 - D. 21
 - E. 27
5. Di antara bilangan 3 dan 57 disisipkan 8 bilangan sehingga terbentuk barisan aritmetika. Beda dari barisan yang terbentuk adalah
 - A. 6
 - B. 7
 - C. 8
 - D. 9
 - E. 10
6. Jumlah semua bilangan asli di antara 1 dan 150 yang habis dibagi 4 sama dengan
 - A. 2812
 - B. 2912
 - C. 3012
 - D. 3112
 - E. 3212

