KELAS XII IPA - KURIKULUM GABUNGAN

Sesi 17

MATEMATIKA

DERET TAK HINGGA BARISAN GEOMETRI

Deret geometri tak hingga adalah penjumlahan tak hingga suku-suku barisan geometri. Hasilnya dinotasikan dengan S_∞, di mana

$$S_\infty = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

Untuk $-1<r<1$ atau $|r|<1$ maka akan muncul barisan geometri yang jumlahnya konvergen (tidak menyebar), dimana jumlah takhingganya adalah

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Sedangkan bila $r<-1$ atau $r>1$ maka akan muncul barisan geometri yang jumlahnya divergen (menyebar) dan jumlah tak hingganya tidak didefinisikan.

CONTOH SOAL

Jumlah tak hingga dari barisan geometri 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... adalah ….

Pembahasan

$a = 6,\ r = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{6}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{6}{\frac{2}{3}}$$

$$= 9$$

CONTOH SOAL

Suatu barisan geometri tak hingga memiliki jumlah tak hingga 16. Jika suku pertamanya 8 maka suku ke 4 barisan itu adalah ….

Pembahasan

$S_\infty = 16$

$a = 8$

maka

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$16 = \frac{8}{1-r}$$

$$1-r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

maka

$$U_4 = ar^3$$

$$= 8\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= 1$$

CONTOH SOAL

Suku ke-n suatu deret geometri nilainya adalah 3^{-n}, maka jumlah tak hingga suku-sukunya adalah ….

Pembahasan

$U_n = 3^{-n}$

$U_1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$U_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

maka $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

sehingga

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

CONTOH SOAL

Jumlah tak hingga deret geometri ${}^2\log x + {}^4\log x + {}^{16}\log x + \ldots$ adalah ....

Pembahasan

Diketahui suku pertama

$a = {}^2\log x$

$r = \frac{u_2}{u_1}$

$r = \frac{{}^4\log x}{{}^2\log x}$

$r = \frac{{}^{2^2}\log x}{{}^2\log x}$

$r = \frac{\cancel{{}^2\log x}}{2\,\cancel{{}^2\log x}}$

$r = \frac{1}{2}$

Sehingga

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

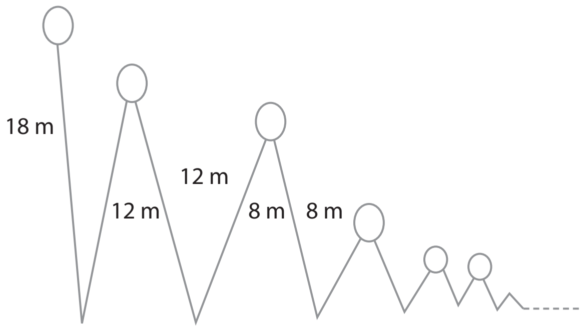
$$S_\infty = \frac{{}^2\log x}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = 2\,{}^2\log x$$

CONTOH SOAL

Suatu bola jatuh dari ketinggian 18 m kemudian memantul dengan ketinggian berkurang $\frac{2}{3}$ dari ketinggian sebelumnya. Demikian berulang terus menerus, hingga akhirnya bola berhenti. Panjang lintasan bola jatuh hingga berhenti adalah …

Pembahasan



Panjang lintasan (p)

$$p = 18 + 12 + 12 + 8 + 8 + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} + ...$$

$$p = (18 + 12 + 8 + ...) + (12 + 8 + \frac{16}{3} + ...)$$

Untuk suku ganjil a = 18, $r = \frac{2}{3}$

$$S_{1\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{18}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 54$$

Untuk suku genap $a = 12$, $r = \frac{2}{3}$

$$S_{2\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{12}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 36$$

$$P = S_{1\infty} + S_{2\infty}$$

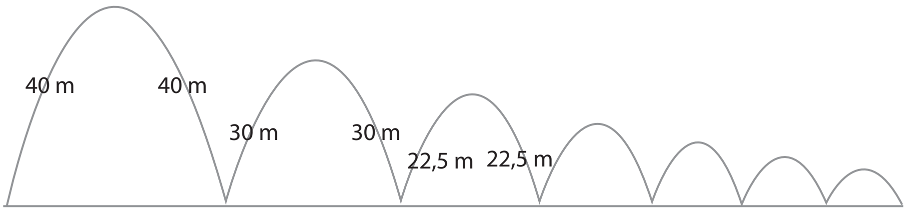
$$= 54 + 36$$

$$= 90 \text{ m}$$

CONTOH SOAL

Suatu bola dilemparkan keatas dan mencapai ketinggian 40 meter, setiap bola jatuh dan memantul, tinggi pantulannya selalu ¾ dari tinggi sebelumnya. Panjang lintasan bola yang dilalui bola tersebut adalah …

Pembahasan



Diketahui h = 40 meter

Sehingga panjang lintasan bola dapat dituliskan

$P = 40 + 40 + 30 + 30 + 22{,}5 + 22{,}5 + \ldots$

Kita asumsikan deret bilangan di atas adalah deret tak hingga

$P = (40 + 30 + 22{,}5 + \ldots) + (40 + 30 + 22{,}5 + \ldots)$

$P = 2(40 + 30 + 22{,}5 + \ldots)$

$$P = 2.\frac{40}{1-\frac{3}{4}}$$

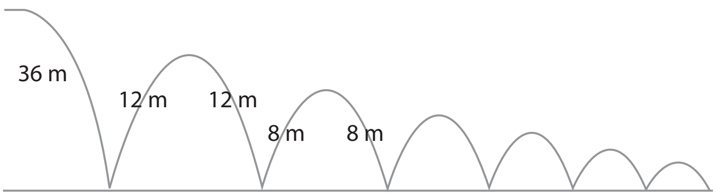
$P = 320$ meter

CONTOH SOAL

Suatu bola jatuh dari ketinggian 36 m kemudian memantul dengan ketinggian berkurang $\frac{2}{3}$ dari ketinggian sebelumnya. Demikian berulang terus menerus, hingga akhirnya bola berhenti. Panjang lintasan bola sejak pantulan kedua hingga berhenti adalah …

Pembahasan

Perhatikan gambar berikut



$$P = 8 + 8 + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} + ...$$

$$P = 2\left(8 + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} + ...\right)$$

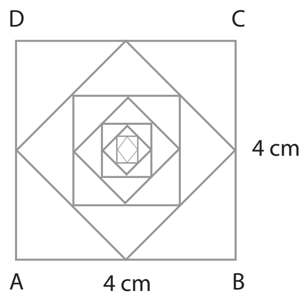
$$P = 2\left(\frac{8}{1 - \frac{2}{3}}\right)$$

$$P = 2.24$$

$$P = 48$$

CONTOH SOAL

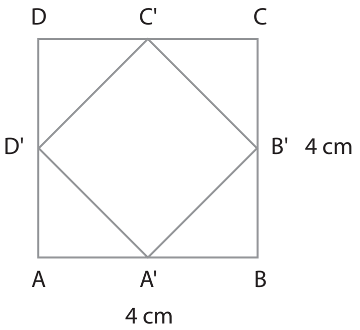
Perhatikan gambar berikut



Gambar diatas menunjukkan persegi ABCD. Didalamnya dibentuk terus-menerus persegi yang 4 titik sudutnya diambil dari titik tengah sisi persegi sebelumnya. Jumlah luas daerah persegi yang terbentuk adalah …

Pembahasan

Perhatikan persegi yang pertama dan yang kedua



Misalnya luas total adalah L dimana

$L = L_{ABCD} + L_{A'B'C'D'} + ...$

Nampak jelas bahwa $L_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2} L_{ABCD}$ begitupula persegi setelahnya akan memiliki luas ½ luas persegi sebelumnya

$L = 16 + \frac{1}{2}.16 + ...$

$a = 16, r = \frac{1}{4}$

sehingga

$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$

$S_{\infty} = \frac{16}{1-\frac{1}{2}}$

$S_{\infty} = 32$

CONTOH SOAL

Suatu deret geometri $\frac{1}{x-1} + \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x-1}\right)^3 + ...$ jumlahnya akan konvergen bila memenuhi syarat …

Pembahasan

Rasio dari deret di atas adalah $\frac{1}{x-1}$, ${}^{2}\log^{2}(x-2)$ agar jumlah deretnya konvergen maka $|r|<1$

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|<1$$

Dari sifat nilai mutlak

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|<1$$

$|x-1|$ di mana $x \neq 1$

$x-1>1$ atau $x-1<-1$

$x>2$ atau $x<0$

Sehingga agar deret di atas konvergen nilai x haruslah

$x>2$ atau $x<0$

CONTOH SOAL

Deret geometri ${}^{2}\log(x-2)+{}^{2}\log^{2}(x-2)+{}^{2}\log^{3}(x-2)+\ldots$ akan konvergen jika …

Pembahasan

Rasio (r) dari deret geometri diatas adalah ${}^{2}\log(x-2)$. Agar jumlah deretnya konvergen maka

$-1<r<1$

$\rightarrow -1<{}^{2}\log(x-2)<1$

$\rightarrow {}^{2}\log 2^{-1}<{}^{2}\log(x-2)<{}^{2}\log 2^{1}$

$\rightarrow \cancel{{}^{2}\log}\,\frac{1}{2}<\cancel{{}^{2}\log}\,(x-2)<\cancel{{}^{2}\log}\,2$

$\rightarrow \frac{1}{2}<x-2<2$

$\rightarrow \frac{5}{2}<x<4$

LATIHAN SOAL

1. Suku ke-n deret geometri dirumuskan dengan $U_n = 4.3^{2-n}$. Jumlah tak hingga suku-suku deret tersebut adalah ….

A. 6 D. 15
B. 9 E. 18
C. 12

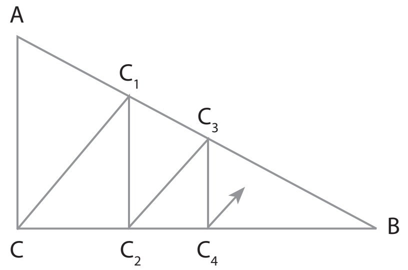
2. Deret geometri tak hingga dengan rasio = (3 – 2x) akan *konvergen* apabila ….

A. $1 < x < 2$ D. $-1 < x < 1$
B. $-2 < x < -1$ E. $-2 < x < 2$
C. $1 < x < 2$

3. Jika $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + ... = \frac{6}{7}$ maka nilai x = ….

A. 0,6 D. 1,25
B. 0,85 E. 1,5
C. 1,1

4. Jika pada segitiga siku-siku ABC panjang AC = x, sudut ACB = 90° dan sudut BAC = 60°. $CC_1 \perp AB$, $C_1C_2 \perp BC$, $C_2C_3 \perp AB$, $C_3C_4 \perp BC$ dan seterusnya. Panjang $AC + CC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_4 + \ldots = \ldots.$



A. $\frac{x\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ D. $\frac{2x}{2+\sqrt{3}}$
B. $2x\sqrt{3}$ E. $x(3 + 2\sqrt{3})$
C. $2x(2+\sqrt{3})$

5. Jumlah deret geometri tak hingga $\sqrt{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}+...$ adalah....

A. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}+1\right)$
D. $3(\sqrt{2}+1)$

B. $\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$
E. $4(\sqrt{2}+1)$

C. $2(\sqrt{2}+1)$

6. Sebuah bola dijatuhkan vertikal dari ketinggian 6 m, terjadi pantulan ke-2, ke-3, ke-4 dan setereusnya dengan ketinggian 4 m, $\frac{8}{3}$ m, $\frac{16}{9}$ m dan seterusnya. jarak lintasan yang ditempuh bola sampai berhenti adalah ….

A. 16 m
D. 24 m

B. 18 m
E. 30 m

C. 20 m

7. Agar deret geometri $\frac{x-1}{x},\frac{1}{x},\frac{1}{x(x-1)},...$ jumlahnya mempunyai limit, nilai x harus memenuhi ….

A. $x > 0$
D. $x > 2$

B. $x < 1$
E. $x < 0$ atau $x > 2$

C. $0 < x < 1$

8. Suatu deret geometri dengan suku pertama a dan pembanding $^2\log(x-3)$. Deret ini mempunyai limit bila x memenuhi ….

A. $3 < x < 4$
D. $3{,}5 < x < 5$

B. $3 < x < 5$
E. $4 < x < 5$

C. $2{,}5 < x < 5$

9. Sebuah bola pingpong dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 2 meter. Setiap kali setelah bola itu memantul ia mencapai ketinggian $\frac{3}{4}$ dari ketinggian sebelumnya. Panjang lintasan bola tersebut dari pantulan ketiga sampai berhenti adalah ….

A. 3,38 m
D. 6,75 m

B. 3,75 m
E. 7,75 m

C. 4,25 m

10. Suatu barisan geometri memiliki jumlah tak hingga 8. Jika jumlah tak hingga suku-suku ganjilnya 6, maka rasio dari barisan itu adalah ....

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{3}{4}$