

MATEMATIKA



BARISAN DAN DERET GEOMETRI

A. BARISAN GEOMETRI

Suatu barisan bilangan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ disebut sebagai barisan geometri apabila terdapat bilangan tetap $r \neq 0$ sedemikian sehingga

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = r$$

Untuk $n \in$ bilangan asli dan $n \geq 1$

Di mana r disebut sebagai rasio.

CONTOH SOAL

1. Manakah di antara barisan-barisan bilangan berikut yang termasuk ke dalam barisan geometri

4, 8, 16, 32, ...

81, 27, 9, 3, ...

4, 8, 16, 20, ...

Pembahasan:

- 4, 8, 16, 32 barisan geometri karena

$$\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = 2$$

dengan rasio = 2

- 81, 27, 9, 3 barisan geometri karena

$$\frac{27}{81} = \frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{dengan rasio} = \frac{1}{3}$$

- 4, 8, 16, 20 bukan barisan geometri karena

$$\frac{8}{4} = \frac{16}{8} \neq \frac{20}{16}$$

$$2 \neq \frac{5}{4}$$

2. Bila rasio dari barisan geometri $2m, 2m + 1, 2p$ adalah 3 maka nilai $p - m$ adalah ...

Pembahasan:

$2m, 2m + 1, 2p$ barisan geometri dengan rasio 3

$$\frac{2m+1}{2m} = 3$$

$$2m+1 = 6m$$

$$m = \frac{1}{4}$$

berlaku juga

$$\frac{2p}{2m+1} = 3$$

$$2p = 6m + 3$$

$$2p = 6\left(\frac{1}{4}\right) + 3$$

$$8p = 6 + 12$$

$$p = \frac{9}{4}$$

$$\text{maka } p - m = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$$

3. Tiga bilangan $x, 2x+2, 12$ membentuk barisan geometri. Maka nilai dari x adalah ...

Pembahasan:

$x, 2x + 2, 12$ membentuk barisan geometri maka sesuai definisi

$$\frac{2x+2}{x} = \frac{12}{2x+2} = r$$

Perhatikan ruas kiri dan tengah

$$\frac{2x+2}{x} = \frac{18}{2x+2}$$

$$(2x+2)^2 = 18x$$

$$4x^2 + 8x + 4 = 18x$$

$$4x^2 - 10x + 4 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(2x-1)(x-2) = 0$$

$$\text{maka } x = \frac{1}{2} \text{ atau } x = 2$$

4. Tiga bilangan $p+2$, $3p$, $5p+4$ membentuk barisan geometri. Maka nilai dari p adalah ...

Pembahasan:

$p+2$, $3p$, $5p+4$ barisan geometri maka berlaku

$$\frac{3p}{p+2} = \frac{5p+4}{3p}$$

$$9p^2 = (5p+4)(p+2)$$

$$9p^2 = 5p^2 + 14p + 8$$

$$4p^2 - 14p - 8 = 0$$

$$2p^2 - 7p - 4 = 0$$

$$(2p+1)(p-4) = 0$$

$$\text{maka } p = -\frac{1}{2} \text{ atau } p = 4$$

B. SUKU KE-N BARISAN GEOMETRI

Suku ke- n barisan geometri dapat dicari satu persatu selama nilai n -nya kecil, sedangkan untuk nilai n besar lebih efisien menggunakan rumus suku ke- n di mana rumus suku ke- n adalah

$$u_n = a \times r^{n-1}$$

Di mana a adalah suku pertama barisan.

CONTOH SOAL

1. Suku ke 10 barisan geometri x^2, x^4, x^6, \dots adalah

Pembahasan:

$$a = x^2, r = \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

maka

$$\begin{aligned}U_{10} &= ar^{10-1} \\ &= x^2 (x^2)^9 \\ &= x^2 \cdot x^{18} \\ &= x^{20}\end{aligned}$$

2. Diketahui barisan geometri a^2, a^5, a^8, \dots maka a^{29} merupakan suku ke

Pembahasan:

$$a^2, a^5, a^8, \dots$$

$$\text{Suku pertama } a^2 \text{ dan } r = \frac{a^5}{a^2} = a^3$$

$$U_n = U_1 r^{n-1} = a^{29}$$

$$a^2 (a^3)^{n-1} = a^{29}$$

$$a^2 a^{3n-3} = a^{29}$$

$$a^{3n-1} = a^{29}$$

$$3n - 1 = 29$$

$$3n = 30$$

$$n = 10$$

sehingga a^{29} adalah suku ke-10 barisan geometri.

3. Diketahui suku ke-2 dan suku ke-4 barisan geometri berturut-turut 12 dan 27. Jika nilai $r > 0$ maka nilai dari suku ke-3 adalah ...

Pembahasan:

$$U_4 = ar^3 = 27$$

$$U_2 = ar = 12$$

kita bagi kedua suku

$$\frac{U_4}{U_2} = \frac{27}{12}$$

$$\frac{ar^3}{ar} = \frac{9}{4}$$

$$r^2 = \frac{9}{4}$$

$$r = \frac{3}{2}$$

$$U_3 = U_2 \cdot r$$

$$= 12 \cdot \frac{3}{2}$$

$$= 18$$

4. Rumus suku ke-n dari barisan bilangan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ adalah ...

Pembahasan:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$a = 1, r = \frac{1}{2}$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= (2^{-1})^{n-1}$$

$$= 2^{1-n}$$

5. Barisan geometri memiliki rumus suku ke-n $u_n = 2^{3-2n}$, maka rasio dari barisan itu adalah ...

Pembahasan:

$$u_n = 2^{3-2n}$$

- $U_1 = 2^{3-2 \cdot 1}$

$$= 2$$

- $U_2 = 2^{3-2 \cdot 2}$

$$= 2^{-1}$$

maka

$$\begin{aligned}r &= \frac{U_2}{U_1} \\ &= \frac{2^{-1}}{2} \\ &= 2^{-2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

6. Setiap awal tahun Boni menyimpan modal sebesar Rp2.000.000,- pada suatu bank dengan bunga majemuk 10% pertahun. Jumlah modal tersebut setelah akhir tahun kelima adalah ...

Pembahasan:

misal modal = $m = 2000.000$

Akhir tahun ke-1

$$\begin{aligned}U_1 &= m + \frac{10}{100}m \\ &= m + 0,1m \\ &= 1,1m\end{aligned}$$

Akhir tahun ke-2

$$\begin{aligned}U_2 &= U_1 + \frac{10}{100}U_1 \\ &= U_1 + 0,1U_1 \\ &= 1,1U_1 \\ &= (1,1)(1,1)m \\ &= m(1,1)^2\end{aligned}$$

dan seterusnya akan membentuk barisan geometri dengan rasio (1, 1)

maka

$$\begin{aligned}U_5 &= ar^5 \\ &= m(1,1)^5 \\ &= (2000.000)(1,1)^5\end{aligned}$$

C. SUKU TENGAH BARISAN GEOMETRI

Barisan geometri dengan banyak suku ganjil dapat ditentukan suku tengahnya (U_t) dengan formula

$$U_t = \sqrt{a \cdot U_n}$$

Di mana U_n suku terakhir, dan $t = \frac{n+1}{2}$

CONTOH SOAL

1. Suku tengah dari barisan geometri yang memiliki suku awal 3 dan suku akhir 12 adalah ...

Pembahasan:

$a = 3$, $U_n = 12$, maka

$$\begin{aligned} U_t &= \sqrt{a \cdot U_n} \\ &= \sqrt{3 \cdot 12} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

2. Barisan geometri dengan rasio positif memiliki 9 suku. Bila nilai suku tengahnya dan suku ke-7 berturut-turut 12 dan 48 maka nilai suku akhirnya adalah ...

Pembahasan:

$n = 9$ maka

$$\begin{aligned} t &= \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{9+1}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

sehingga suku tengahnya $U_5 = 12$. Karena $U_7 = 48$ maka

$$\begin{aligned} \frac{U_7}{U_5} &= \frac{48}{12} \\ r^2 &= 4 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

maka suku terakhir U_9 adalah

$$\begin{aligned}U_9 &= U_7 \cdot r^2 \\ &= 48 \cdot 2^2 \\ &= 192\end{aligned}$$

D. SISIPAN PADA BARISAN GEOMETRI

Diketahui suatu barisan geometri $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ dengan rasio r . Jika disisipkan k bilangan di antara dua suku berdekatan, sehingga terbentuk barisan geometri dengan rasio r' maka

$$r' = \sqrt[k+1]{r}$$

Dengan suku pertama barisan baru sama dengan suku pertama barisan sebelumnya

CONTOH SOAL

1. Diketahui suatu barisan geometri 1, 2, 4, 8, ...dst. Bila di antara dua bilangan yang berdekatan pada barisan tersebut disisipkan 1 bilangan, maka suku ke-10 dari barisan baru yang terbentuk adalah

Pembahasan:

Dari 1, 2, 4, 8 diketahui $a = 1$, $r = 2$ disisipkan $k = 1$ bilangan

$$\begin{aligned}r' &= \sqrt[1+1]{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_{10} &= ar^9 \\ &= 1 \cdot (\sqrt{2})^9 \\ \text{maka} \quad &= 2^{\frac{9}{2}} \\ &= 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 16\sqrt{2}\end{aligned}$$

E. DERET GEOMETRI HINGGA

Deret geometri hingga adalah jumlah- n suku pertama dari suku-suku pada barisan geometri, dinotasikan S_n di mana

untuk $r > 1$ atau $r < -1$ lebih mudah menggunakan

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

untuk $-1 < r$ atau $r < 1$ lebih mudah menggunakan

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

di mana $r \neq 1$

CONTOH SOAL

1. Jumlah 10 suku pertama dari barisan bilangan $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots$ adalah ...

Pembahasan:

$$a = \frac{1}{16}, r = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{16}} = 2$$

ditanyakan jumlah 10 suku pertama

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{\frac{1}{16}(2^{10} - 1)}{2 - 1} \\ &= \frac{1}{16}(1024 - 1) \\ &= \frac{1023}{16} \end{aligned}$$

2. Formula untuk jumlah n suku pertama pada barisan geometri $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ adalah ...

Pembahasan:

$$a = 4, r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

maka

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 8(1-2^{-n}) \\ &= 8 - 2^{3-n} \end{aligned}$$

3. Diketahui jumlah n suku pertama pada barisan geometri $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+2} - 9)$ maka rasio barisan itu adalah

Pembahasan:

$$\text{Diketahui } S_n = \frac{1}{2}(3^{n+2} - 9)$$

maka

$$\begin{aligned} S_1 &= U_1 = \frac{1}{2}(3^{1+2} - 9) \\ &= \frac{1}{2}(27 - 9) = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= U_1 + U_2 = \frac{1}{2}(3^{2+2} - 9) \\ &= \frac{1}{2}(81 - 9) \end{aligned}$$

$$9 + U_2 = 36$$

$$U_2 = 27$$

maka rasionya

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{27}{9} = 3$$

4. Seutas tali dipotong menjadi 8 bagian yang panjangnya masing-masing membentuk deret geometri. Apabila tali terpendek adalah 3 cm dan yang terpanjang 384 cm, maka panjang tali semula adalah ...

Pembahasan:

Diketahui $U_1 = 3$, $U_8 = 384$

maka

$$\frac{U_8}{U_1} = r^7 = \frac{384}{3}$$

$$r^7 = 128$$

$$r = 2$$

maka panjang tali semula sama dengan jumlah 8 suku pertama

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 765 \text{ cm} \end{aligned}$$

5. Suku ke-3 suatu deret geometri mempunyai nilai 20. Jumlah nilai suku ke-4 dan ke-5 adalah 75. Jika $r > 0$ maka suku pertama deret itu adalah....

Pembahasan:

Diketahui $U_3 = 20$ maka

$$U_3 = ar^2 = 20 \quad \dots(1)$$

Diketahui $U_4 + U_5 = 75$, maka

$$ar^3 + ar^4 = 75$$

$$ar^2(r + r^2) = 75$$

kita substitusikan persamaan (1)

$$20(r + r^2) = 75$$

$$r + r^2 = \frac{75}{20}$$

$$r + r^2 = \frac{15}{4}$$

$$4r^2 + 4r - 15 = 0$$

$$(2r - 3)(2r + 5) = 0$$

$$r = \frac{3}{2} \text{ atau } r = -\frac{5}{2}$$

karena $r > 0$ maka $r = \frac{3}{2}$

dari persamaan (1) didapatkan

$$ar^2 = 20$$

$$a\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 20$$

$$a = 20 \times \frac{4}{9}$$

$$a = \frac{80}{9}$$

LATIHAN SOAL

1. Barisan $x+4$, $4x$, $4x+16$ membentuk barisan geometri. Bila x bilangan bulat, maka nilai x yang memenuhi adalah ..
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4 (jawaban yang benar)
E. 5
2. Diketahui deret geometri dengan suku pertama 6 dan suku keempat 48. Jumlah 6 suku pertama deret tersebut adalah
A. 368
B. 369
C. 378
D. 379
E. 384
3. Suku pertama dan rasio dari suatu barisan geometri berturut-turut adalah 2 dan 3. Jika jumlah n suku pertama deret tersebut = 80 maka, banyaknya suku dari barisan tersebut adalah
A. 2
B. -2
C. 3
D. -3
E. 4
4. Dalam deret geometri diketahui suku ke-2 = 10 dan suku ke-5 = 1250. Jumlah n suku pertama deret tersebut adalah

- A. $2(5^{n-1})$ D. $\frac{1}{2}$
 B. $2(4^n)$ E. $\frac{1}{4}$
 C. $\frac{1}{2} 5^{n-1}$
5. Suku ke-1 dan ke-2 dari suatu deret geometri berturut-turut adalah p^4 dan p^{3x} . Jika suku ke-7 adalah p^{34} , maka nilai x adalah SPMB 04 (Regional III)
- A. 1 D. 4
 B. 2 E. 5
 C. 3
6. Suku pertama dan suku keempat suatu deret geometri berturut-turut adalah 2 dan $\frac{1}{4}$. Jumlah 6 suku pertama deret itu adalah
- A. $4\frac{63}{64}$ D. $\frac{63}{32}$
 B. $4\frac{31}{32}$ E. $\frac{63}{16}$
 C. $2\frac{63}{64}$
7. Suku ke-5 suatu deret geometri sama dengan 12 dan suku ke-8 sama dengan 96. Jumlah 8 suku pertama deret tersebut sama dengan
- A. 191,25 D. 194,25
 B. 192,25 E. 195,25
 C. 193,25
8. Di antara bilangan a dan b disisipkan 4 bilangan sehingga keenam bilangan tersebut membentuk barisan geometri dengan rasio $\frac{1}{3}$. Jika jumlah semua bilangan tersebut = $53\frac{25}{27}$ maka suku ke-2 adalah
- A. 36 D. $\frac{4}{3}$
 B. 12 E. $\frac{4}{9}$
 C. 3

9. Pada suatu barisan geometri, jumlah suku ke-4 dan ke-6 sama dengan 30. Sementara suku ke-3 sama dengan 3. Suku ke-8 adalah
- A. 90 D. 96
B. 92 E. 98
C. 94
10. Suatu barisan geometri suku ke-3 adalah a^{-4} dan suku ke-4 adalah a^x . Suku ke-10 adalah a^{52} , maka x adalah
- A. 10 D. 4
B. 8 E. 2
C. 6